

Biografia do Matemático???

Tales e Pitágoras

Biografia do Matemático (Itália, séc. XII-XIII)

Celebrizado pelo romance de Dan Brown

Breve explicação do Princípio Matemático: Algumas das suas contribuições têm aplicação universal, como a sucessão que leva o seu nome (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...) e o número de ouro (1.618...), nomeadamente no crescimento animal e vegetal, na disposição das espirais de sementes nas flores, etc.



TALES E PITÁGORAS

10 livros, 10 matemáticos, 10 puzzles para aprender e divertir-se

FIBONACCI + MISSING SQUARE (12/07/07)

PITÁGORAS + PENTALFA (19/07/07)

JOHN CONWAY + OURI (26/07/07)

LEIBNIZ + GO 9x9 (02/08/07)

MANDELBROT + TORRES DE HANÓI (09/08/07)

ARQUIMEDES + STOMACHION (16/08/07)

PACIOLI + ANÉIS CHINESES (23/08/07)

GALOIS + PUZZLE 15 (30/08/07)

AL-KWARIZMI + ALQUERQUE (06/09/07)

EULER + HEXÁGONO MÁGICO (13/09/07)

FICHA EDITORIAL

TÍTULO: Sucessão de Fibonacci + 'Missing Square'

AUTOR: Carlos Pereira dos Santos, João Pedro Neto, Jorge Nuno Silva

REVISÃO: Edimpresa

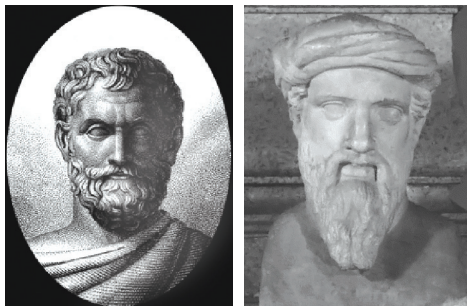
IMPRESSÃO E ACABAMENTO: Norprint **DATA DE IMPRESSÃO:** JUNHO 2007

DEPÓSITO LEGAL: 261140/07 **ISBN:** 978-989612270-6

JOGAR COM A MATEMÁTICA DOS GÉNIOS

10 MATEMÁTICOS, 10 QUEBRA-CABEÇAS, 10 LIVROS DE BOLSO. DE TALES A CONWAY, CADA LIVRO CONTÉM INFORMAÇÃO SOBRE A VIDA E OBRA DE UM DOS MAIORES MATEMÁTICOS DA HUMANIDADE, BEM COMO A DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UM 'PUZZLE', QUE É REPRODUZIDO EM MADEIRA E FAZ PARTE DESTA COLECÇÃO.

Veremos que Arquimedes inventou um 'puzzle' diabólico há mais de dois mil anos (Stomachion) ou que o Pentagrama, tão respeitado pelos pitagóricos, também era um jogo de tabuleiro. E ficaremos a saber que Conway desenvolveu uma teoria de jogos, que em África se pratica um complexo jogo aritmético há séculos e que o grande filósofo e matemático Leibniz promovia os jogos de tabuleiro asiáticos. Ou ainda que a teoria dos fractais de Mandelbrot está associada também a 'puzzles', como as Torres de Hanói, que o popular jogo dos 15 é um exercício de Teoria de Grupos e que Euler, há 300 anos, já estudava o precursor do Sudoku. E para além de falarmos sobre alguns dos jogos que os árabes introduziram na Europa há mais de mil anos, neste primeiro livro aprenderemos também que a célebre sucessão de Fibonacci, que nasceu na resolução de um problema sobre criação de coelhos, é útil na concepção de um quebra-cabeças geométrico. Divirta-se e aprenda matemática com os jogos que desvendam o raciocínio de alguns dos maiores génios da História.

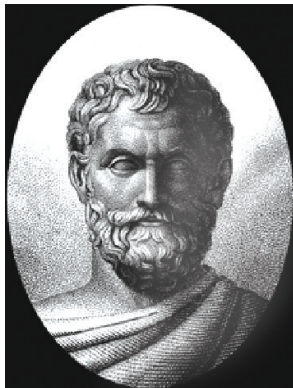


TALES E PITÁGORAS

Introdução

Os primeiros indivíduos reconhecidos como matemáticos, a quem se atribui a paternidade de vários teoremas, foram Tales (~625--547 a.C.) e Pitágoras (~580--500 a.C.).

Tales nasceu em Mileto, na Ásia Menor. Acredita-se que, nas suas viagens, aprendeu Geometria com os egípcios e Astronomia com os babilónios.



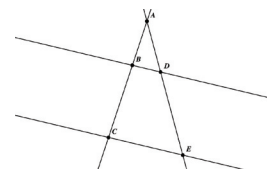
TALES

Algumas estórias envolvendo Tales chegaram até nós, cuja veracidade é impossível de determinar, mas que ilustram a personalidade desta figura maior da Grécia Antiga. Uma conta-nos como, cansado de ver atribuído aos homens de saber um atestado de incompetência para assuntos terrenos, deduziu, mediante cálculos astrológicos, que a produção de azeitona seria particularmente boa na estação seguinte. Assim, apropriou-se de todas as prensas que

pôde, prensas essas que alugou a bom preço na altura certa...

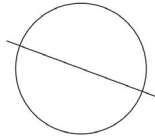
Platão conta-nos como Tales, caminhando absorto em observações astronómicas, caiu num poço. Uma mulher, que lhe valeu, riu-se e criticou: “Como pode o sábio saber o que fazem as estrelas e desconhecer o chão que pisa?” Ainda hoje esta imagem ilustra o comportamento dos estudiosos que se concentram excessivamente nas suas matérias.

Todos aprendemos na escola o célebre Teorema de Tales, que diz respeito a uma proporcionalidade de comprimentos de segmentos, quando duas rectas concorrentes são cortadas por duas rectas paralelas.



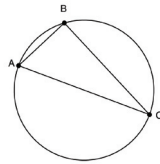
$$AB/BC = AD/DE$$

Outros resultados há cuja paternidade é atribuída a Tales. Alguns são tão evidentes, que não parecem teoremas, como o que diz que todo o círculo é bissectado (isto é, dividido em duas partes iguais) por qualquer diâmetro.



CÍRCULO BISSECTADO POR DIÂMETRO

Outros teoremas são mais sofisticados, como o que garante que todo o ângulo inscrito numa semi-circunferência é recto (Ângulo ABC na figura).



O ÂNGULO ABC É RECTO

A Tales atribui-se também a medição da altura de uma pirâmide egípcia, mediante o uso de uma pequena estaca.

Colocando a estaca verticalmente no chão Tales sabia que, à medida que o movimento do Sol vai projectando sombras de comprimentos diferentes, há uma altura, fácil de determinar, em que a sombra mede tanto como a própria estaca. Basta neste mesmo momento medir a sombra da pirâmide...

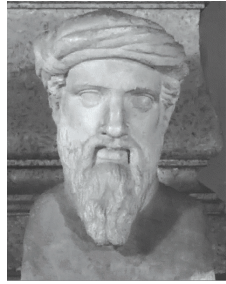


COMO MEDIR OBJECTOS ALTOS USANDO UMA VARA

Este método funciona, já que o grande afastamento do Sol nos permite assumir que os seus raios são paralelos.

Usando um conceito relacionado, também estudado nas nossas escolas, as semelhanças de triângulos, Tales obteve um método de estimar a distância a que um barco no mar se encontra da costa. Conta-se também que previu a data de um eclipse lunar, o que leva a crer que havia estudado seriamente os textos babilónicos.

Enquanto Tales estabeleceu alguns resultados basilares da Geometria, Pitágoras e os seus seguidores distinguiram-se mais no estudo dos números.



PITÁGORAS

Sobre a vida de Pitágoras pouco se sabe ao certo. Contudo, acredita-se que nasceu por volta de 580 a.C. em Samos, uma ilha no mar Egeu. Após ter viajado, nomeadamente pelo Egipto, regressou à sua terra natal e fundou uma escola quando contava já perto de 50 anos de idade. Esta escola tinha fins políticos, religiosos e filosóficos. Tratava-se de uma

associação muito exigente. As normas de conduta incluíam a partilha dos bens terrenos entre os seus membros, preconizavam uma educação comum, bem como regras sobre a alimentação (eram vegetarianos).

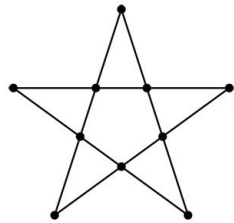
Os pitagóricos concentravam-se sobre quatro temas: a Aritmética, a Música, a Geometria e a Astronomia. Estes quatro mathemata deram mais tarde origem ao quadrivium medieval. A Aritmética tratava o estudo dos números naturais, suas classificações e propriedades. A Música abordava as relações entre os números, a Astronomia estava para a Geometria um pouco como a Música estava para a Aritmética: enquanto uma estuda relações entre objectos, a outra dedica-se aos objectos em si. Após três anos em que somente podiam ouvir as lições do mestre através de uma cortina, os iniciados eram aceites no núcleo da sociedade.

Conta-se que, por volta dos 60 anos, Pitágoras casou com uma sua aluna brilhante, Tea, que o auxiliou nas suas investigações por vários anos.

Esta sociedade mística cumpria alguns ritos estranhos aos nossos olhos. Por exemplo, não podiam apanhar

objectos que caíssem ao chão, não podiam comer feijão, e a razão para o vegetarianismo prendia-se com a crença na transmigração das almas humanas para animais. Conta-se que, um dia, Pitágoras, vendo um cão a ser espancado, interveio e disse ao agressor: “Pára! Nesse animal vive a alma de um amigo meu. Reconheço o pela voz.”

O símbolo que utilizavam para se reconhecerem era exactamente o do nosso puzzle de hoje, o pentagrama.



PENTAGRAMA

De acordo com os preceitos desta organização semi-secreta, todas as suas descobertas eram atribuídas a Pitágoras. Não podemos distinguir entre ele e os seus discípulos nesta matéria.

Além disso, Pitágoras não deixou textos escritos e o voto de segredo a que os discípulos estavam sujeitos tornam a autoria dos resultados difícil de estabelecer. Assim, quando escrevemos sobre Pitágoras, podemos estar a referir-nos a algum outro protagonista desconhecido da sua agremiação.

Sobre a morte de Pitágoras também não há certezas, mas conta-se que os pitagóricos se tornaram politicamente muito poderosos e que uma revolta popular, por volta de 500 a.C. incendiou a respectiva sede, matando muitos. Entre eles estaria o próprio Pitágoras. A componente política deste movimento parece ter desaparecido com Pitágoras. É certo que a seita continuou muito influente nos séculos seguintes, mas somente nas vertentes matemática e filosófica.

A grande diferença entre os pitagóricos e outras agremiações reside na apologia do saber, da Matemática em particular. A ideia de que a natureza se lê e compreende com a mediação da Matemática é pitagórica, “tudo é número” é a expressão atribuída a Pitágoras.

MATEMÁTICA PITAGÓRICA

Pitágoras, experimentando com o monocórdio, instrumento de uma corda só, constatou que as harmonias estavam associadas a razões entre números inteiros. Por exemplo, quando se faz vibrar meia corda obtém-se um som uma oitava acima do primeiro, ou seja, a oitava está associada à relação 2:1. De forma semelhante à quinta corresponde uma razão 3:2. Se até os sons eram regidos pelos números... não surpreende a afirmação «tudo é número».



PITÁGORAS E AS SUAS EXPERIÊNCIAS MUSICAIS, NUMA GRAVURA DO SÉC. XV

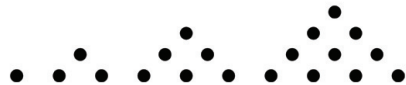
Esta ideia de harmonia do mundo foi estendida ao próprio Cosmos. Pitágoras acreditava que os planetas eram transportados por esferas de cristal, animadas a diferentes velocidades, que produziriam uma música que ele conseguia detectar: a música das esferas.

A doutrina pitagórica consistia em numerologia mística misturada com filosofia cósmica. Cada ente, material ou ideal, estava associado a um número inteiro, e os números tinham personalidade própria. Assim, o 1 representava a razão, já que esta só pode produzir um conjunto consistente de verdades, o 2 era masculino, enquanto o 3 era feminino, o símbolo da justiça era o 4, por ser produto de iguais ($4 = 2 \times 2$), o 5 era o número do casamento, por ser a soma do 2 e do 3, etc. E assim se foi desenvolvendo a Matemática, ganhando corpo como disciplina, sendo esta a primeira abordagem abstracta, desligada das aplicações imediatas, dos números. Esta tradição mística e contemplativa da Matemática haveria de perdurar até à Idade Média na Europa, altura em que os trabalhos de matemáticos como Euclides e

Arquimedes, do século III a.C., foram redescobertos.

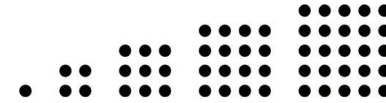
A obra responsável por esta longevidade foi o Tratado de Aritmética de Nicómaco de Gerasa, do século I d.C. O seu conteúdo é semelhante ao da parte aritmética dos Elementos de Euclides, mas o tratamento é diferente: Nicómaco não prova os seus resultados e enfatiza o carácter místico dos números e de suas propriedades.

Os gregos não dispunham de símbolos próprios para números, usavam o alfabeto para esse efeito (as nove primeiras letras para os nove primeiros números, as nove seguintes para os nove primeiros múltiplos de 10, etc.), o que não era muito prático. Talvez esta seja uma razão para que atribuísem formas aos números, que hoje referimos por números figurados. Assim, temos os números triangulares: 1, 3, 6, 10, ...



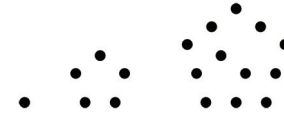
NÚMEROS TRIANGULARES

Os números quadrados: 1, 4, 9, 16, ...



NÚMEROS QUADRADOS

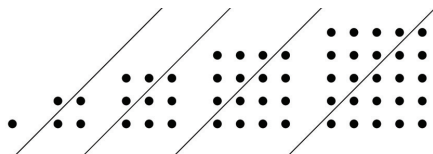
Números pentagonais: 1, 5, 12, ...



NÚMEROS PENTAGONAIS

E assim sucessivamente.

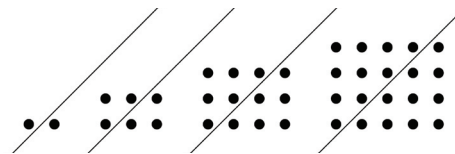
Estas representações ilustram propriedades numéricas, fazendo-as «saltar à vista». Por exemplo, todo o número quadrado (maior do que 1) é soma de dois números triangulares consecutivos. Das nossas figuras: $4 = 1+3$, $9 = 3+6$, $16 = 6+10$, ... basta traçar uma linha para tornar esta afirmação evidente:



OS NÚMEROS QUADRADOS SÃO SOMA DE
NÚMEROS TRIANGULARES CONSECUTIVOS

Os números triangulares têm uma regra de formação muito simples. A partir do primeiro, 1, passa-se ao segundo acrescentando 2, deste ao terceiro adicionando 3, do terceiro ao quarto somando 4, e assim sucessivamente. Obtemos o n-ésimo número triangular calculando $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Por outro lado, juntando pares de números triangulares iguais obtemos os números oblongos, que são os que se podem representar em disposições rectangulares em que as dimensões diferem por uma unidade: 2, 6, 12, 20, ...



NÚMEROS OBLONGOS

Os números oblongos são 1×2 , 2×3 , 3×4 , 4×5 , etc. O n-ésimo número oblongo será $n \times (n+1)$. Como dois números triangulares juntos equivalem a um oblongo da mesma ordem, temos

$$2 \times T_n = n \times (n+1)$$

onde usámos a notação T_n para o n-ésimo número triangular, portanto

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

e assim obtivemos uma fórmula geral que rege a formação dos números triangulares.

Os pitagóricos classificavam os números naturais em várias categorias, por exemplo: pares (os múltiplos de 2), ímpares (os outros), números primos (os que não têm divisores para além deles mesmos e da unidade, como 2, 3, 5, 7, 11), compostos (os que se podem escrever como

produto de dois números maiores que 1, como $4=2 \times 2$, $6=2 \times 3$, $8=2 \times 4$, $10=2 \times 5$). Os números podiam ser deficientes, se a soma dos seus divisores próprios lhes fosse inferior, como o 5 (o único divisor próprio de 5 é 1), ou abundantes, se a soma lhes fosse superior, como o 12 ($1+2+3+4+6=16$). Os que iguallassem a soma dos divisores chamavam-se perfeitos, como o 6 ($1+2+3$) e o 28 ($1+2+4+7+14$). Os gregos conheciam mais dois: o 496 e o 8128. É curioso que só se conhecem números perfeitos pares. O maior tem mais de quatro milhões de dígitos! Ainda hoje não sabemos se existe uma infinidade de números perfeitos, nem se existe pelo menos um que seja ímpar!

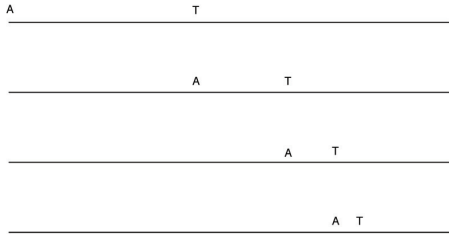
A fé inabalável dos pitagóricos nos números inteiros foi atacada por um elemento de uma escola filosófica rival, Zenão de Elea, por volta de 450 a.C.. Os célebres paradoxos de Zenão, transmitidos por Aristóteles, levantam problemas difíceis para a visão do mundo pitagórico. Vejamos um deles, o paradoxo de Aquiles e da tartaruga.



AQUILES, AQUI DEFRONTANDO AJAX
NUM JOGO DE TABULEIRO,
NUM VASO GREGO DO SÉC. VI

Aquiles, um grande atleta grego, faz uma corrida com uma tartaruga, muito mais lenta do que ele, mas que parte com avanço. Será que Aquiles poderá ultrapassar a tartaruga? Quando Aquiles chegar ao ponto de partida da tartaruga, já esta andou um pouco. Quando o atleta atingir este segundo local, já o animal se deslocou, mesmo que por muito pouco. E assim

sucessivamente... Aquiles tem de percorrer uma distância que inclui uma infinidade de parcelas positivas, como pode ele dar conta do recado?



AS POSIÇÕES DE AQUILES (A) E DA TARTARUGA (T)

Foi preciso esperar mais de mil anos, pela teoria das séries infinitas, para dar significado a este tipo de somas. Hoje, não nos impressionamos com o facto de $1/3 = 0,3333333333\dots$ em que o 3 da dízima se repete sempre. Contudo, isto significa que

$$1/3 = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$$

A verdade é que a soma de uma infinidade de parcelas positivas pode ter um total finito.

O nome de Pitágoras estará para sempre associado ao teorema a que deu o nome. Todos aprendemos na escola que:

Um dia em Siracusa,

Disse Pitágoras aos netos:

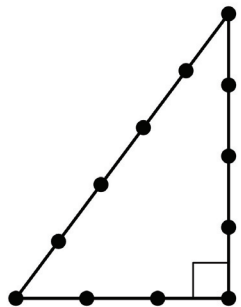
“O quadrado da hipotenusa

É igual à soma dos quadrados dos catetos.”

Um triângulo diz-se rectângulo se um dos seus lados medir 90° , isto é, se for recto. Num triângulo rectângulo os lados menores chamam-se catetos e o maior chama-se hipotenusa.

Este teorema diz que se as medidas dos lados de um triângulo rectângulo forem a , b e c , então $a^2 + b^2 = c^2$. Se três números satisfazem esta relação, dizemos que formam um triplo pitagórico.

Ora, triângulos rectângulos, nomeadamente os de dimensões 3, 4, 5, já eram utilizados no Egipto havia muito tempo, para traçar ângulos rectos. Uma corda, com nós igualmente espaçados, quando esticada formando um ângulo, de tal forma que os lados do triângulo correspondente medissem 3, 4 e 5 espaços entre nós, garantia que o ângulo entre os lados menores era recto.



TRIÂNGULO RECTÂNGULO 3-4-5

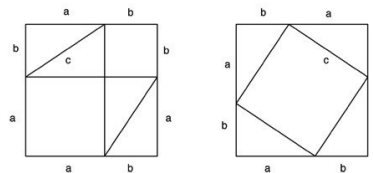
Os babilônios já conheciam os triplos pitagóricos, inscritos em placas de barro datadas de mil anos antes de Pitágoras.



PLACA PLIMPTON 322, COM TABELA DE TERNOS PITAGÓRICOS EM CUNEIFORME

O que parece certo é que foram os gregos a provar o Teorema de Pitágoras. Conhecem-se centenas de provas diferentes, mas parece natural que os gregos tenham recorrido à decomposição de figuras planas.

Uma possibilidade seria a seguinte. Consideremos o triângulo rectângulo de catetos a e b e hipotenusa c . Desenhemos o quadrado de lado $a+b$ mediante duas disposições diferentes.



UMA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

A área do quadrado pode ser encarada como a soma das áreas de dois quadrados e dois rectângulos (ilustração da esquerda):

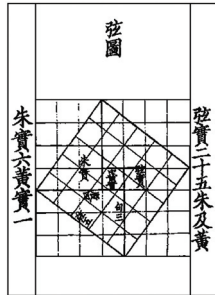
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2axb$$

Alternativamente, seguindo a decomposição da outra ilustração, a área do quadrado de lado $a+b$ pode ser escrita como a soma das áreas de um quadrado e de quatro triângulos:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times a \times b$$

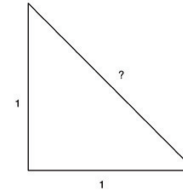
Igualando estas duas expressões, obtemos imediatamente $a^2 + b^2 = c^2$.

As provas por métodos de decomposição parecem tão simples, que provavelmente foram descobertas por outras culturas. Na China, o seguinte diagrama, talvez do século VI a.C., representa a prova mais antiga que se conhece desta proposição.



O TEOREMA DE PITÁGORAS NA CHINA

Este teorema, que tanta fama deu aos pitagóricos, trouxe problemas transcendentais. Para os compreender consideremos um triângulo rectângulo em que ambos os catetos medem 1 unidade. Quanto mede a hipotenusa?



A INCOMENSURABILIDADE

Pelo Teorema de Pitágoras, se a hipotenusa mede c , então

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

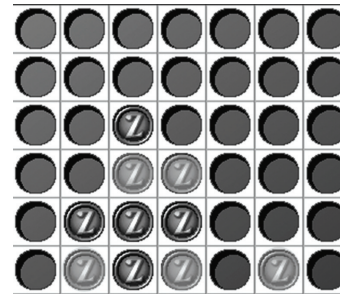
Mas, que número é que tem o seu quadrado igual a 2? Certamente nenhum número inteiro. Será que alguma fracção $\frac{n}{m}$ satisfaz $(\frac{n}{m})^2 = 2$? Vamos assumir que sim, que existe uma fracção nessas condições, que podemos considerar estar em forma irredutível, isto é, n e m não têm nenhum divisor comum para além da unidade. Se

assim fosse, teríamos $n^2=2xm^2$, logo n^2 teria de ser um número par, o que obriga a que n também fosse par, já que somente os números pares têm quadrados pares (um número ímpar pode escrever-se na forma $2s+1$ e tem-se $(2s+1)^2=4s^2+2s+1$ que também é ímpar). Então, o número n , sendo par, pode escrever-se como o dobro de outro número, digamos $n=2k$. Assim, de $n^2m^2=2$ obtemos $4k^4=2m^2$, donde $2k^2=m^2$ e podemos concluir que m é um número par. Tínhamos assumido que n e m não têm factores comuns, portanto obtivemos uma contradição. Assim termina a prova, pelo método de redução ao absurdo, de que nenhuma fracção pode ter o quadrado igual a 2.

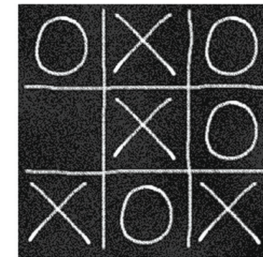
As consequências desta descoberta foram terríveis. Era crença geral que quaisquer comprimentos fossem comensuráveis, isto é, possíveis de medir recorrendo a números inteiros, escolhendo uma unidade conveniente. Agora sabia-se que nem a hipotenusa de um triângulo isósceles é comensurável com o cateto... A crise da incomensurabilidade obrigou ao aparecimento de novas teorias e nova Matemática... que fica para outro capítulo.

O PUZZLE PENTALFA

Há vários jogos famosos que possuem, na sua génese, alguma componente de alinhamento: objectivo de alinhar peças do mesmo tipo, capturas envolvendo linhas de peças, etc. Esta família de jogos \mathcal{D} Jogos de Alinhamento \mathcal{D} parece estar presente de forma independente em várias culturas, o que não é muito frequente na história dos jogos de tabuleiro. Qual de nós nunca jogou o *Jogo do Galo* ou o *Quatro em Linha*?



QUATRO EM LINHA

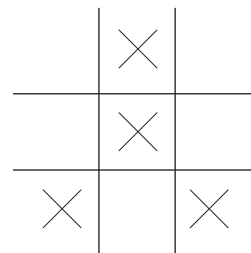


JOGO DO GALO

(Imagens de www.zillions-of-games.com/)

O *Jogo do Galo* é de origem muito antiga e é jogado um pouco por toda a parte. Tem designações diversas: *Noughts and Crosses*, no Reino Unido, *Tic Tac Toe*, nos EUA ou *Jogo da Velha*, no Brasil. A designação *Noughts and Crosses* vem do facto de o jogo envolver a escrita de zeros (*noughts*) e cruzes (*crosses*). Já o nome *Tic Tac Toe* deve estar relacionado com sons que uma criança pode fazer ao efectuar o “três em linha” vitorioso. O nome *Jogo da Velha* pode ter origem na Inglaterra. Supostamente, quando, nos fins de tarde, as mulheres se encontravam a bordar, as mais idosas, por não terem mais força, jogavam este jogo.

O *Jogo do Galo* é um exemplo de um jogo ao alcance da total compreensão humana. Se bem jogado, por ambas as partes, o jogo termina empatado. E, para ser bem jogado, não necessita muito mais do que um pouco de atenção. O tabuleiro é muito pequeno e, conseqüentemente, existem distribuições de cruzes (círculos) que evitam qualquer hipótese de alinhamento por parte do adversário (ver figura seguinte).



IMPOSSIBILIDADE DE ALINHAMENTO DE CÍRCULOS

Embora não se saiba muito bem qual a origem do nome *Jogo do Galo*, pode estar relacionada com o facto de a imagem anterior fazer lembrar um pé de galo. A confirmar-se essa hipótese, teríamos um caso raro em que o nome do jogo está directamente ligado com uma estratégia de bem jogar.

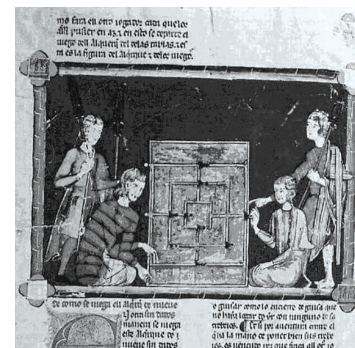
O *Jogo do Galo* é muitas vezes usado como exercício de programação para estudantes de informática. Não considerando simetrias, existem apenas 26.830 jogos diferentes, o que é um número muito pequeno para os actuais computadores.

O *Jogo do Galo* rapidamente perde o interesse das pessoas, uma vez que deixa de constituir um desafio. Sendo assim, ao longo da história inventaram-se imensos jogos de alinhamento mais sofisticados. O conhecido *Quatro em Linha* é um exemplo desse tipo (ver primeira figura desta secção). As suas regras são simples: coloca-se alternadamente discos nas colunas de uma grelha 7x6 e ganha quem alinhar quatro discos na horizontal, vertical ou diagonal. O tabuleiro é colocado na vertical, tendo-se que contar com a gravidade (os discos caem). Diz-se que o *Quatro em Linha* foi inventado pelo Capitão Cook durante as suas viagens no séc. XVIII.

Este jogo, embora muito mais complexo do que o *Jogo do Galo*, foi resolvido de forma independente por Victor Allis e James D. Allen. Jogando de forma perfeita, o primeiro jogador ganha, se começar a partida na coluna central. Se o primeiro jogador optar por jogadas iniciais nas colunas adjacentes à coluna central o jogo fica

empatado (mais uma vez assumindo que os dois jogadores jogam perfeitamente). As jogadas nas colunas exteriores são inferiores, permitindo inclusivamente que o segundo jogador ganhe.

Existem jogos de alinhamento bastante complexos muito mais antigos do que o *Quatro em Linha*. Na obra *Los libros de acedrex dados e tablas* encomendada pelo rei Afonso X, de Castela, do século XIII, podemos encontrar uma gravura do clássico *Jogo do Moinho* (*Nine Men's Morris*).



JOGO DO MOINHO

Este jogo inicia-se com um tabuleiro vazio com três quadrados concêntricos (24 pontos distintos dispostos em 16 linhas de três). Cada jogador dispõe de nove peças de uma certa cor.

Alternadamente, os jogadores colocam as suas nove peças em pontos vazios. Sempre que um jogador alinhar três peças (dito moinho) pode tirar uma peça adversária desde que esta não faça parte de um moinho, peça essa que não volta a entrar no jogo. Depois de todas as peças colocadas, cada jogador pode jogar uma peça, ao longo de uma linha, para uma casa vazia adjacente, mantendo-se igual a regra da captura. Se um jogador ficar reduzido a apenas três peças, pode saltar para qualquer ponto vazio, mas sem ser nesse caso, as jogadas têm de ser feitas de forma usual. Perde o jogador que ficar impossibilitado de jogar ou que fique reduzido a duas peças.

Alguns acreditam que este típico jogo de alinhamento era praticado já no Egipto Antigo. Na obra *Board Games Round the World*, de Bell & Cornelius, é referida uma ocorrência deste jogo no templo de Kurna (1400 a. C.).

O nome *Nine Men's Morris* tem origem na palavra latina *merellus* que significa peça de jogar.

Outro jogo de alinhamento que se joga há centenas de anos no oriente é o *Gomoku* (*moku* significa intersecção). É jogado alternando a colocação de peças nos pontos de intersecção de um tabuleiro 19x19. O tabuleiro é colocado deitado, não havendo a noção de gravidade, ao contrário do *Quatro em Linha*. Além disso, o objectivo é alinhar cinco peças na horizontal, vertical ou diagonal. A história deste jogo é paralela à história de outro clássico jogo oriental chamado *Go*, que será abordado num futuro número.

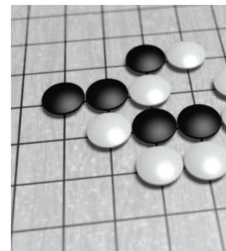


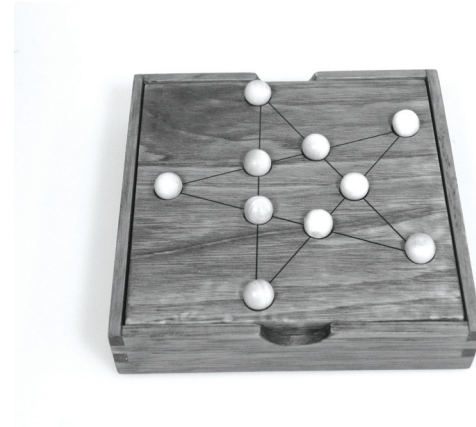
Imagem de um tabuleiro moderno



Gravura de Kano Eitoku do séc. XVI

O *Jogo do Moinho* foi resolvido por Ralph Gasser, sendo empate com um jogo perfeito. Já o *Gomoku* foi resolvido por Victor Allis, sendo uma vitória para o primeiro jogador. O leitor, ao ler sobre as resoluções destes jogos, poderá pensar que estes perderam o interesse, no entanto, tal não se passa. Na maioria das vezes as resoluções utilizam processamentos informáticos envolvendo um número enorme de possibilidades. O nosso cérebro não tem tal capacidade, pelo que o jogo continua interessante para os humanos. Dizer que os jogos perdem interesse quando são resolvidos informaticamente é mais ou menos o mesmo que dizer que as corridas de 100 metros deveriam deixar de existir com o advento de automóveis. A prova que o interesse permanece bem vivo está nos milhares de pessoas que continuam diariamente a jogar estes jogos, seja ao vivo ou na Internet.

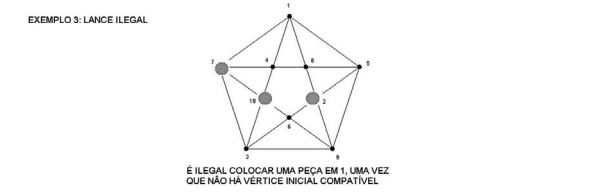
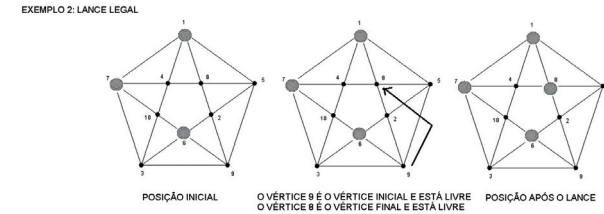
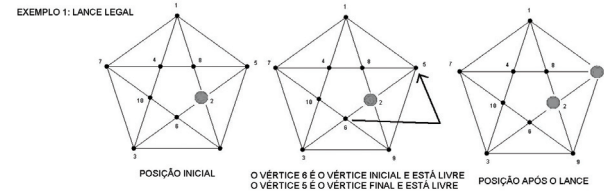
Como seria de esperar, existem jogos inventados num tabuleiro pentagonal que, como vimos na secção anterior, sempre foi uma figura geométrica importante. O *puzzle* Pentalfa é um jogo para uma pessoa em que o objectivo é colocar nove peças nas dez intersecções de um pentagrama (tanto faz a sua disposição). Esta configuração também pode ter ocorrido como variante do Três em Linha, com regras semelhantes às do *Moinho*.



PUZZLE PENTALFA

As nove peças têm de ser colocadas à vez no pentagrama obedecendo às seguintes regras:

- Cada peça tem de “visitar” dois pontos sendo o segundo ponto o seu destino final;
- Os dois pontos que são visitados têm de estar alinhados sendo intercalados por outro ponto;
- Apenas os pontos que são visitados têm de estar livres. O ponto que está no meio dos dois pode estar ou não ocupado.



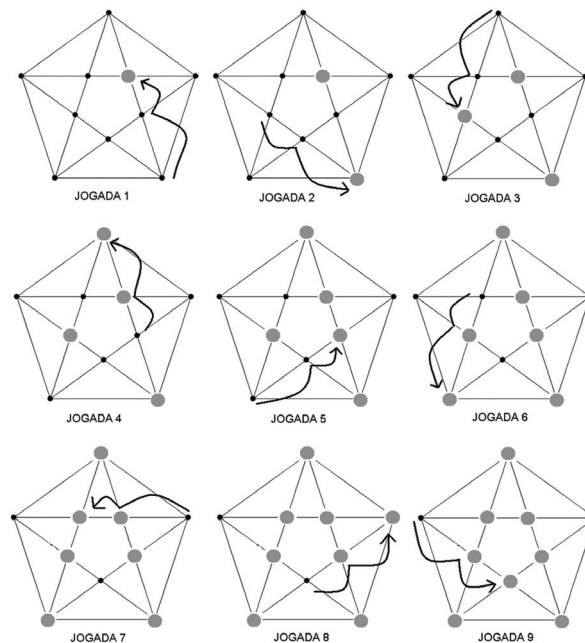
Este *puzzle* pode ser considerado um jogo de alinhamento, uma vez que envolve jogadas em forma de segmentos de recta. Segundo Bell, em *Board Games Round the World*, o *puzzle* pode ser originário da ilha de Creta. Tente o leitor resolvê-lo antes de ler o resto deste texto.

A SOLUÇÃO DO PENTALFA

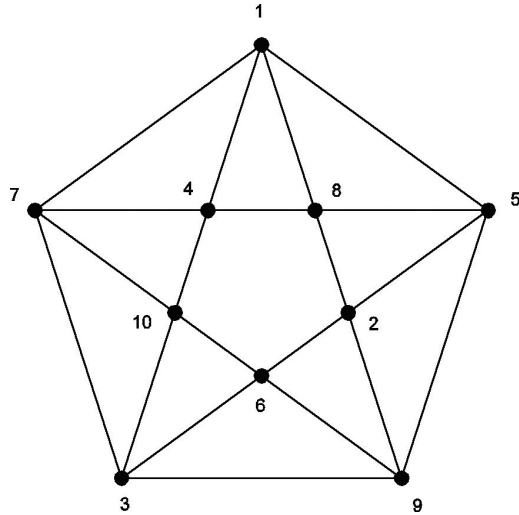
O *puzzle* Pentalfa tem uma estratégia de resolução extremamente simples que pode ser descrita da seguinte forma:

- a) A primeira jogada é feita totalmente ao acaso, devendo apenas o jogador memorizar o ponto inicial dessa jogada;
- b) As jogadas seguintes devem ser feitas de forma ao seu ponto final ser o ponto inicial da jogada imediatamente anterior.

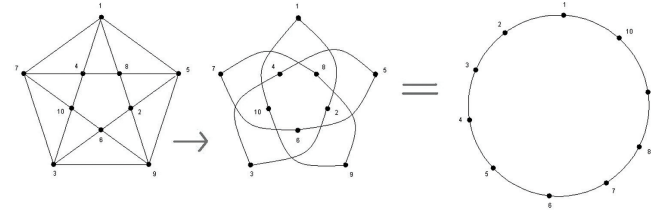
Por uma questão de escrita vamos chamar a este método «estratégia da boa escolha». Exemplifiquemos com uma possível solução:



Para se poder entender a razão de esta estratégia ser eficaz, comecemos por fazer uma numeração dos vértices do Pentalfa:



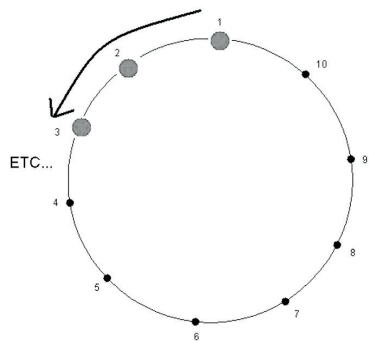
Com base nessa numeração, podemos criar uma nova imagem, unindo vértices que possam ser pontos inicial e final de um movimento. Por exemplo, o vértice 1 está ligado aos vértices 2 e 10, o vértice 10 está ligado aos vértices 1 e 9, etc. Vamos obter uma imagem circular:



Feitas estas considerações, resolver o *puzzle* Pentalfa é equivalente a resolver neste círculo o seguinte *puzzle*:

- Uma jogada consiste em colocar uma pedra num ponto, desde que um dos dois pontos adjacentes esteja vago (no Pentalfa, o ponto inicial do movimento tem de estar livre);
- O objectivo consiste em conseguir colocar nove peças nos pontos do círculo.

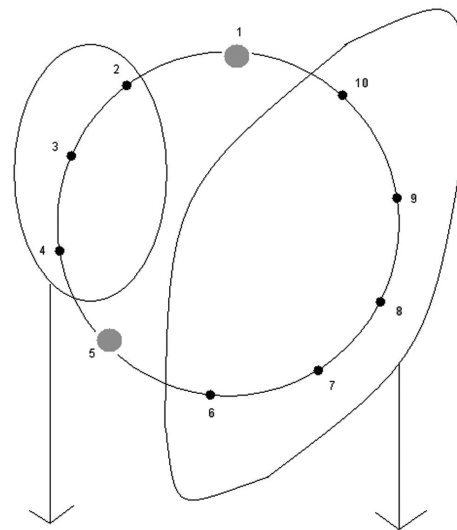
Pode o leitor reparar que uma solução consiste em colocar uma pedra num ponto qualquer, escolher um sentido (o dos ponteiros do relógio ou o contrário dos ponteiros do relógio) e, em seguida, ir sempre colocando a próxima peça no ponto adjacente livre.



Estas soluções são exactamente aquelas que são obtidas com a “estratégia da boa escolha”. No fundo, resolver o *puzzle* Pentalfa resume-se a fazer um simples trajecto circular.

Voltando à nossa imagem circular, repare o leitor que seria mau fazer duas jogadas seguidas intercaladas, uma vez que depois não se conseguiria ter acesso à totalidade dos pontos intercalados. Olhemos para a próxima figura para perceber tal impossibilidade. Quando o jogador jogar em dois dos pontos do conjunto de três à esquerda, o terceiro ficará

inacessível. O mesmo princípio se aplica aos cinco pontos do conjunto da direita. Consequentemente ficarão dois pontos inacessíveis e a solução não será alcançada.



NÃO VAI SER POSSÍVEL TER ACESSO À TOTALIDADE DESTES PONTOS

Este tipo de estratégias envolvendo esquemas construídos por vértices e arestas, unindo esses vértices, é a base de um importante campo da matemática denominado Teoria de Grafos.

