

# Teoria e História de Números

## Teste 2

Jorge Nuno Silva

10 de Janeiro de 2008

1. Prove que
  - (a)  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor -\frac{n}{2} \rfloor = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
  - (b)  $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n, \forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z}.$
2. Determine o dia da semana do dia em que nasceu.
3. Mostre que existe uma infinidade de inteiros  $n$  tais que  $\varphi(n)$  é um quadrado perfeito.
4. Mostre que se o inteiro  $n$  tem  $r$  factores primos ímpares, então  $2^r | \varphi(n)$ .
5. Use o Teorema de Euler para mostrar que se  $(a, n) = (a - 1, n) = 1$ , então

$$a^{\varphi(n)-1} + \dots + a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

6. Prove que, seja qual for o inteiro positivo  $a$ , tanto  $a$  como  $a^{4n+1}$  terminam no mesmo dígito.
7. Mostre que se  $a$  tem ordem  $hk$  módulo  $n$ , então  $a^h$  tem ordem  $k$  módulo  $n$ .
8. Mostre que 2 é raiz primitiva de 19 mas não de 17.
9. Dado que 3 é raiz primitiva de 43, determine todos os inteiros positivos menores que 43 cuja ordem módulo 43 é 6.
10. Use uma tabela de índices para uma raiz primitiva módulo 11 para resolver a congruência  $7x^3 \equiv 3 \pmod{11}$ .