Teoria e História de Números
Teste 1

Jorge Nuno Silva

16 de Novembro de 2007

1. Efectue os cálculos seguintes à moda do Egipto antigo.
   (a) 13×14.
   (b) $105 \div 3$.

2. (a) Escreva em base decimal o número que, em notação sexagesimal, se representa por $2, 45; 23$.
   Resolução:
   $2, 45; 23 = 2 \times 60 + 45 + \frac{23}{60} = 165, 38333333333333333333...$
   (b) Converta para a base sexagesimal o número 12345.
   Resolução:
   $12345 = 3 \times 60^2 + 25 \times 60 + 45$. Logo a resposta é $3, 25, 45$.

3. Qual é o resto da divisão de 3^{40} por 11?
   Resolução:
   Pelo Pequeno Teorema de Fermat, tem-se $3^{10} \equiv 1\ (mod\ 11)$ logo $3^{40} \equiv 1^4 \equiv 1\ (mod\ 11)$.

4. Um cesto tem uma quantidade de ovos tal que, quando se tiram 2 a 2, sobra 1; quando se tiram 3 a 3, sobra 1; quando se tiram 4 a 4, sobra 1; quando se tiram 5 a 5, sobra 1; quando se tiram 6 a 6, sobra 1, mas quando se tiram 7 a 7, não sobra nenhum. Qual é o menor número de ovos que o cesto pode conter?
   Resolução:
   Trata-se de resolver o sistema de congruências $x \equiv 1\ (mod\ 5)$, $x \equiv 1\ (mod\ 6)$, $x \equiv 0\ (mod\ 7)$. Uma aplicação simples do Teorema Chinês dos Restos dá-nos a solução 301.

5. Utilize o Algoritmo de Euclides para determinar inteiros x e y tais que $(56, 72) = 56x + 72y$.

6. (a) Mostre que 496 é um número perfeito.

   (b) Mostre que o produto de dois primos ímpares nunca é um número perfeito.

   Resolução:

   Sejam p, q primos ímpares com $p < q$. Note que $p > 2$ e que $1 + p < q$. Tem-se

$$\sigma(pq) = 1 + p + q + pq < 2q + pq < 2pq$$

   logo pq não pode ser perfeito.

7. (a) Mostre que se f e g são funções multiplicativas (não identicamente nulas) e $f(p^k) = g(p^k)$ para todos os primos p e todos os inteiros positivos k, então $f = g$.

   Resolução:

   Para $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ tem-se

$$f(n) = f(p_1^{k_1}) \cdots f(p_r^{k_r}) = g(p_1^{k_1}) \cdots g(p_r^{k_r}) = g(n)\,.$$

   (b) Mostre que se tem, para todos os inteiros positivos n,

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}\,.$$

   Resolução:

   Pela alínea anterior, basta notar que $n \mapsto \sum_{d|n} \frac{1}{d}$ e $n \mapsto \frac{\sigma(n)}{n}$ são multiplicativas, o que é simples, e confirmar a igualdade nas potências dos primos.

   Temos

$$\sum_{d|p^k} \frac{1}{d} = \frac{1}{1} + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^k}$$

   e

$$\frac{\sigma(p^k)}{p^k} = \frac{1 + p + \cdots + p^k}{p^k}$$

   que são iguais.

8. Relembre que, para $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, se f é multiplicativa, então

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{i=1}^{r} (1 - f(p_i)) \,.$$

Mostre que se tem, para qualquer inteiro positivo n,

$$\sum_{d|n} \mu(d) \sigma(d) = (-1)^r p_1 \cdots p_r \,.$$

Resolução:

Usando a sugestão basta notar que se tem

$$\prod_{i=1}^{r} (1 - \sigma(p_i)) = \prod_{i=1}^{r} (1 - (1 + p_i)) = \prod_{i=1}^{r} (-p_i) = (-1)^r p_1 \cdots p_r \,.$$