

Pensamento Crítico

Exame de 6 de Junho de 2019

1h30m com 30m de tolerância

Jorge Nuno Silva

V

Suponha que numa dada sala da FCUL se encontram n alunos ($n \geq 2$). Prove que existem pelo menos dois alunos com o mesmo número de amigos na sala. [Nota: A relação “ser amigo de” é simétrica: se A é amigo de B então B é amigo de A. Ninguém é amigo de si mesmo.]

Note-se que se alguém tiver $n - 1$ amigos, então ninguém tem zero amigos.

Resolução 1 (Por absurdo): Admitamos então que os n alunos têm todos números diferentes de amigos na sala. Estes números terão de ser

$$0, 1, \dots, n - 1$$

Mas, como notámos, não podem ocorrer simultaneamente o 0 e o $n - 1$. Portanto a nossa hipótese, de que os alunos têm todos números diferentes de amigos, tem de ser falsa.

Resolução 2 (Princípio das Gavetas): A observação inicial garante que os números de amigos terão de estar num dos conjuntos

$$\{0, 1, \dots, n - 2\} \quad \text{ou} \quad \{1, \dots, n - 1\}$$

Em qualquer um dos dois casos, temos $n - 1$ possibilidades diferentes. Como temos n alunos, o Princípio das Gavetas permite tirar a conclusão pretendida.