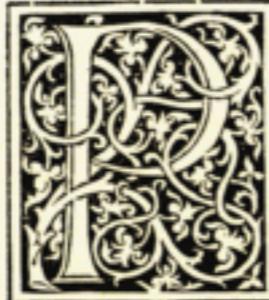


Matemática

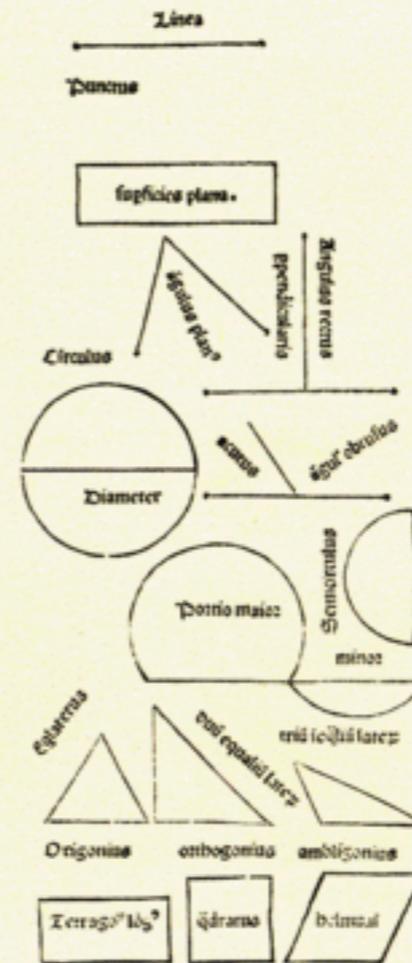
Os Elementos de Euclides (~300 aC)

Præclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimè in artem Geometrie incipit quâsoelicissime:



Punctus est cuius pars non est. **L**inea est longitudo sine latitudine cuius quidem extremitates sunt duo puncta. **L**inea recta est ab uno puncto ad aliud brevissima extensio in extremitates suas utriusque eorum recipiens. **S**uperficies est quae longitudine et latitudine terminatur: cuius termini quidem sunt lineae. **S**uperficies plana est ab una linea ad aliam extensionem in extremitates suas recipiens. **A**ngulus planus est duarum linearum alternis contactus: quarum expansio est super superficiem applicationis non directa. **Q**uando autem angulum continent duae lineae rectae rectilineus angulus nominatur. **Q**uando recta linea super rectam steterit duoque anguli utrobique fuerint aequales: eorum uterque rectus erit. **L**inea quoque linea superstanti cui superstat perpendicularis vocatur. **A**ngulus vero qui recto maior est obtusus dicitur. **A**ngulus vero minor recto acutus appellatur. **T**erminus est quod uniuscuiusque terminus est. **F**igura est quae terminis continetur. **C**irculus est figura plana una quodam linea peripheria nominatur: in cuius medio punctus est: a quo omnes lineae rectae ad circumferentiam exeuntes sibi invicem sunt aequales. **E**t hic quidem punctus centrum circuli dicitur. **D**iameter circuli est linea recta quae super centrum transiens extremitatesque suas circumferentiae applicans circulum in duo media dividit. **S**emicirculus est figura plana diametro circuli et medietate circumferentiae contenta. **P**ortio circuli est figura plana recta linea et parte circumferentiae contenta: semicirculo quidem aut maior aut minor. **R**ectilineae figurae sunt quae rectis lineis continentur: quarum quedam trilaterae quae tribus rectis lineis: quedam quadrilaterae quae quatuor rectis lineis: quaedam multilaterae quae pluribus quatuor rectis lineis continentur. **F**igurarum trilaterarum: alia est triangulus habens tria latera aequalia. **A**lia triangulus duo habens aequalia latera. **A**lia triangulus trium inequalium laterum. **H**abere iterum alia est orthogonius: unum scilicet rectum angulum habens. **A**lia est amblygonium: in qua tres anguli sunt acuti. **F**igurarum autem quadrilaterarum: alia est quadratum quod est equilaterum atque rectangulum. **A**lia est tetragonum longum: quod est figura rectangula: sed equilatera non est. **A**lia est rhombus: quae est equilatera: sed rectangula non est.

De principijs per se notis: et primo de definitionibus carandum.



- No Livro I Euclides introduz 23 definições dentre as quais destacamos:

01. Um ponto é aquilo que não tem partes;

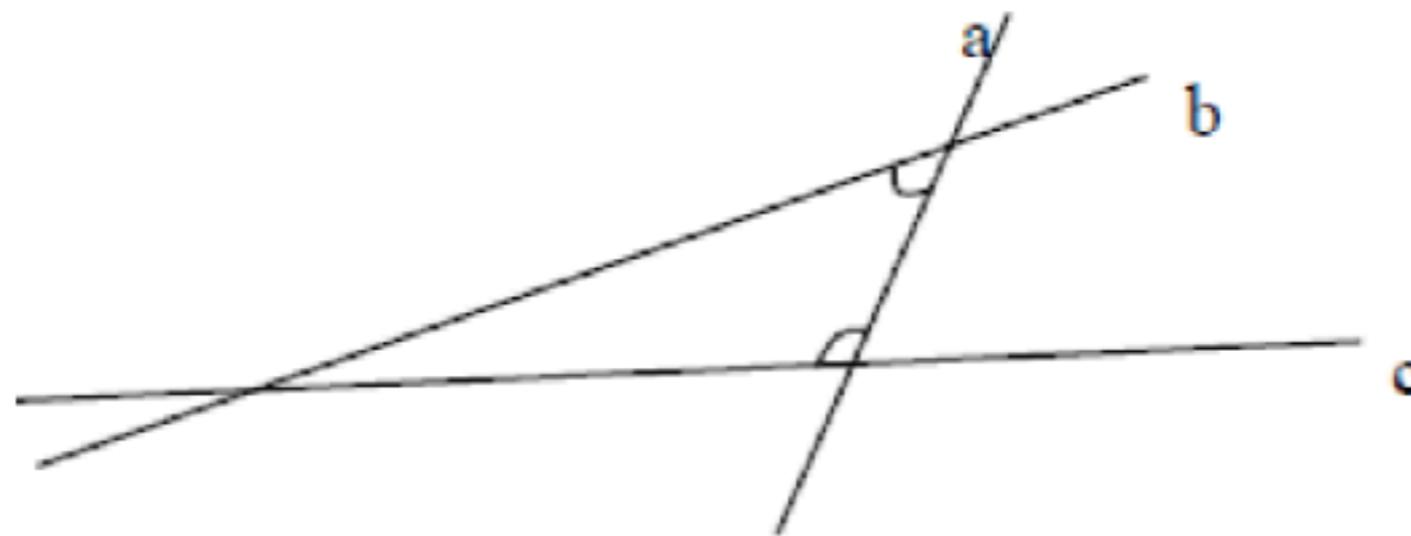
02. Uma linha é um comprimento sem largura;

15. Um círculo é a figura plana fechada por uma linha tal que todos os segmentos sobre ela estejam e que passem por um ponto determinado do interior da figura sejam iguais entre si;

23. Retas paralelas são linhas retas que, estando no mesmo plano, prolongadas indefinidamente nos dois sentidos, não se cruzam.

○ Postulados

- i) “Uma linha reta pode ser traçada de um para outro ponto qualquer”;
- ii) “É possível prolongar arbitrariamente um segmento de reta”;
- iii) “É possível traçar um círculo com qualquer centro e raio”;
- iv) “Dois ângulos retos quaisquer são iguais entre si”;
- v) “Se uma reta, interceptando duas outras retas forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos”.



- i) “Grandezas iguais a uma mesma grandeza são iguais entre si”;
- ii) “Se a grandezas iguais forem adicionadas grandezas iguais, as somas serão iguais”;
- iii) “Se grandezas iguais forem subtraídas de grandezas iguais, os resultados serão iguais”;
- iv) “Grandezas que coincidem entre si são iguais”;
- v) “O todo é maior do que suas partes”.

Propositions

(Def. 1)

(Def. 2)

(Def. 3)

(Def. 4)

(Def. 5)

(Post. 1)

(Post. 2)

(Post. 3)

(Post. 4)

(Axio. 1)

(Axio. 2)

(Axio. 3)

(Axio. 4)

youtube.com/mathematicsonline



0:00 / 2:02



$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Deus criou

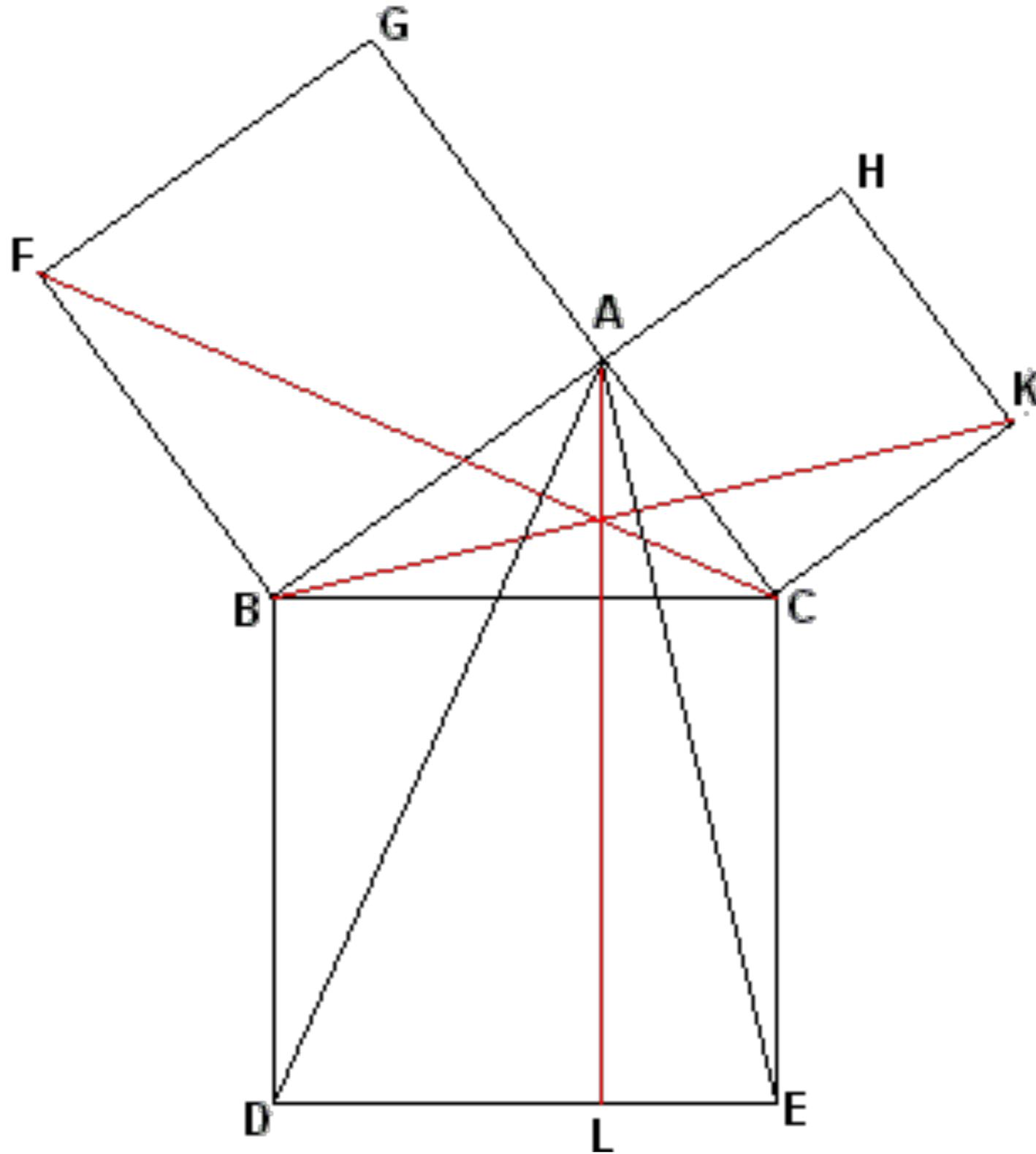
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

tudo o resto é obra do Homem.

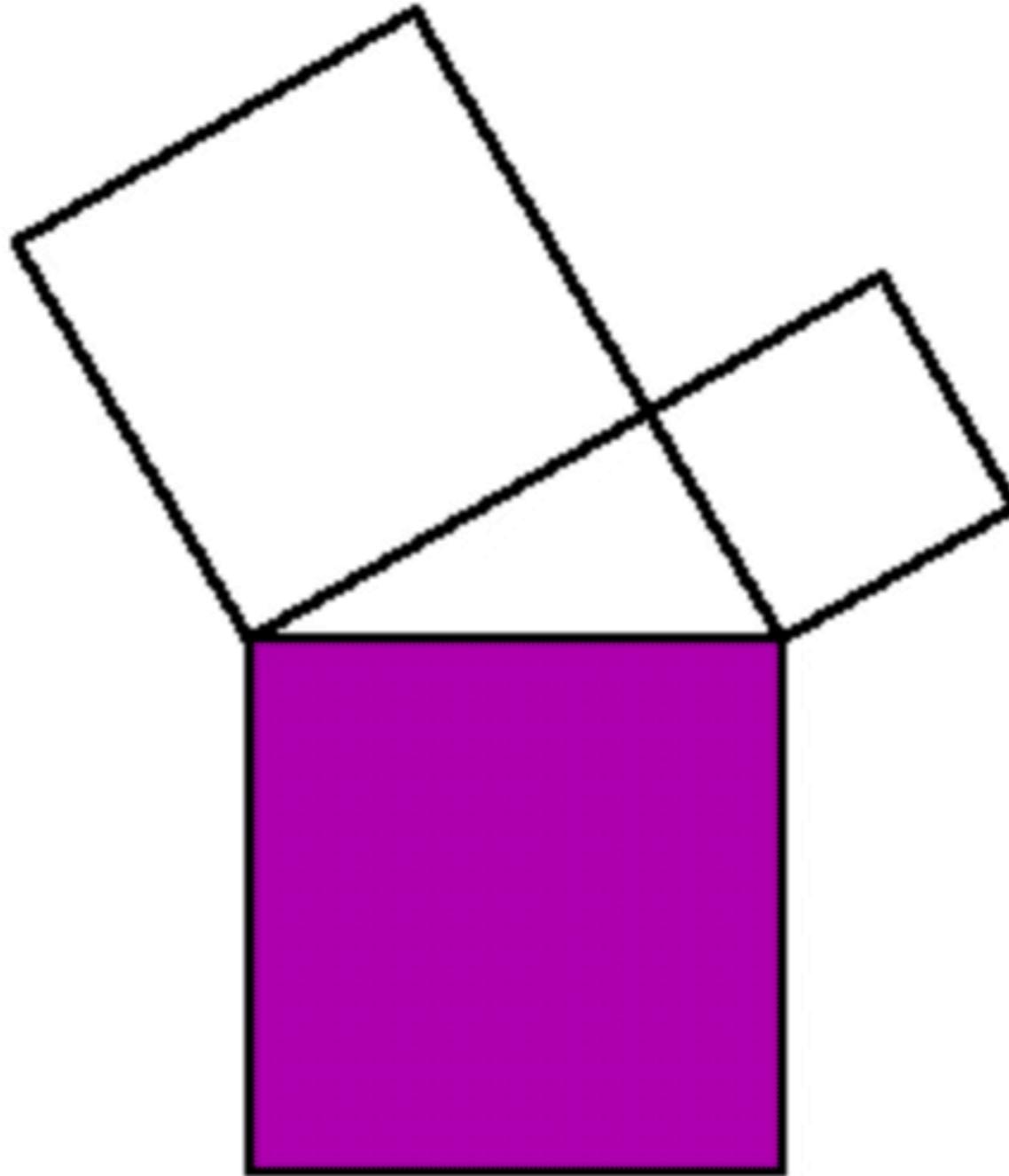
Leopold Kronecker - XIX

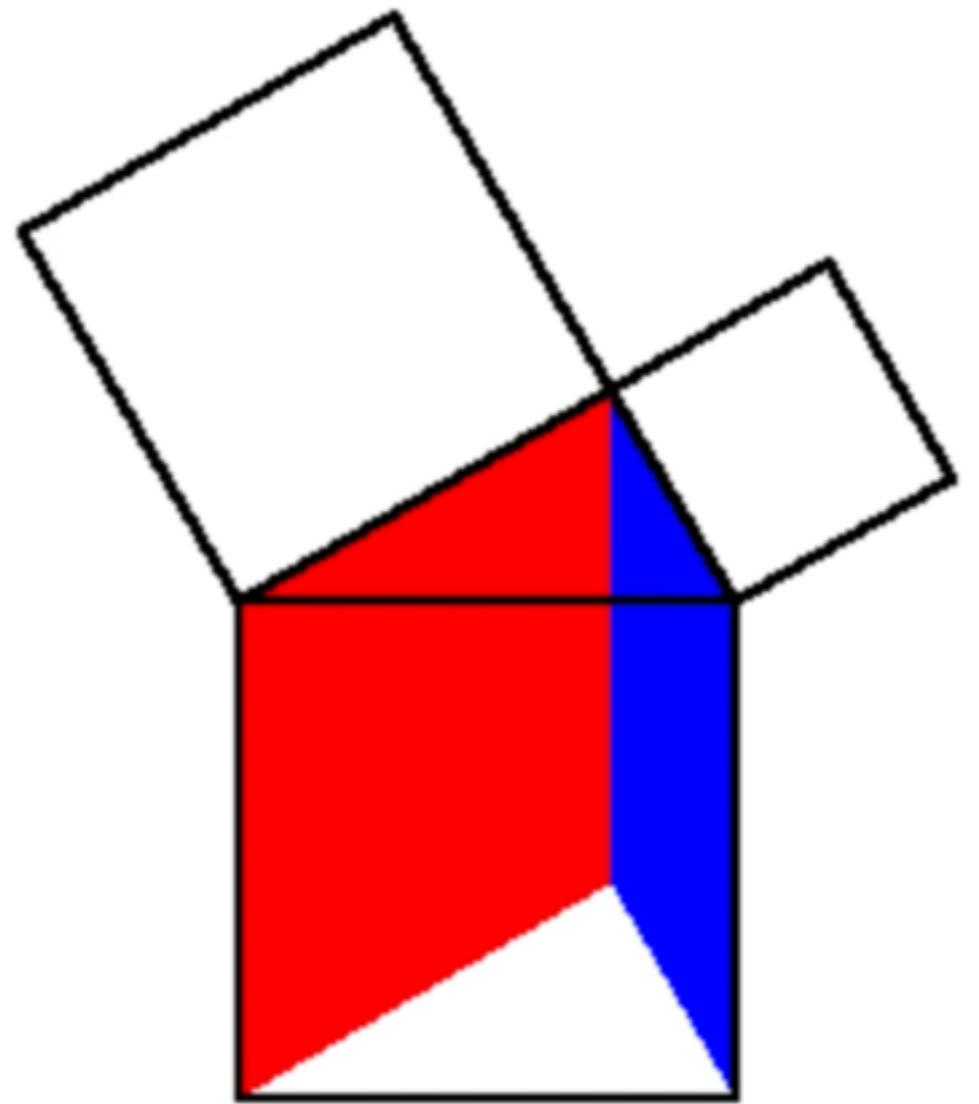
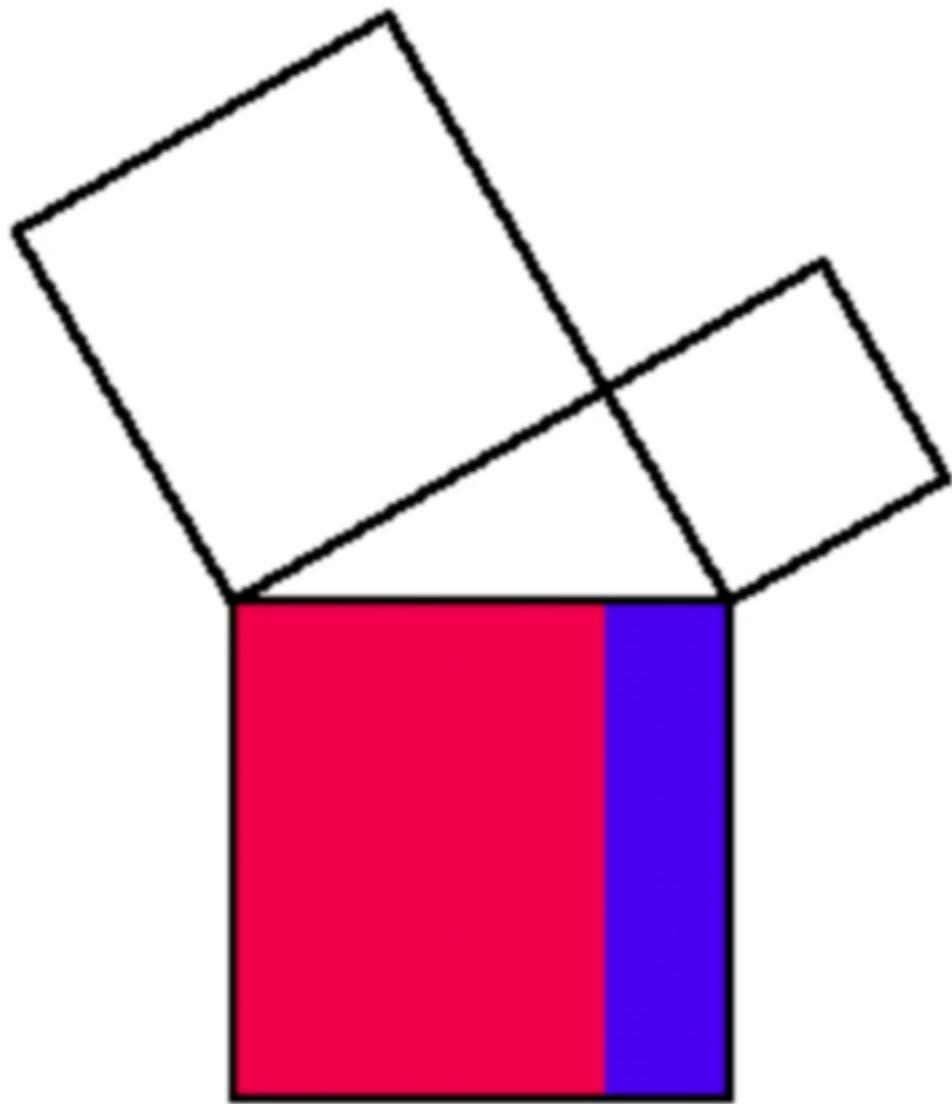
Teorema de Pitágoras

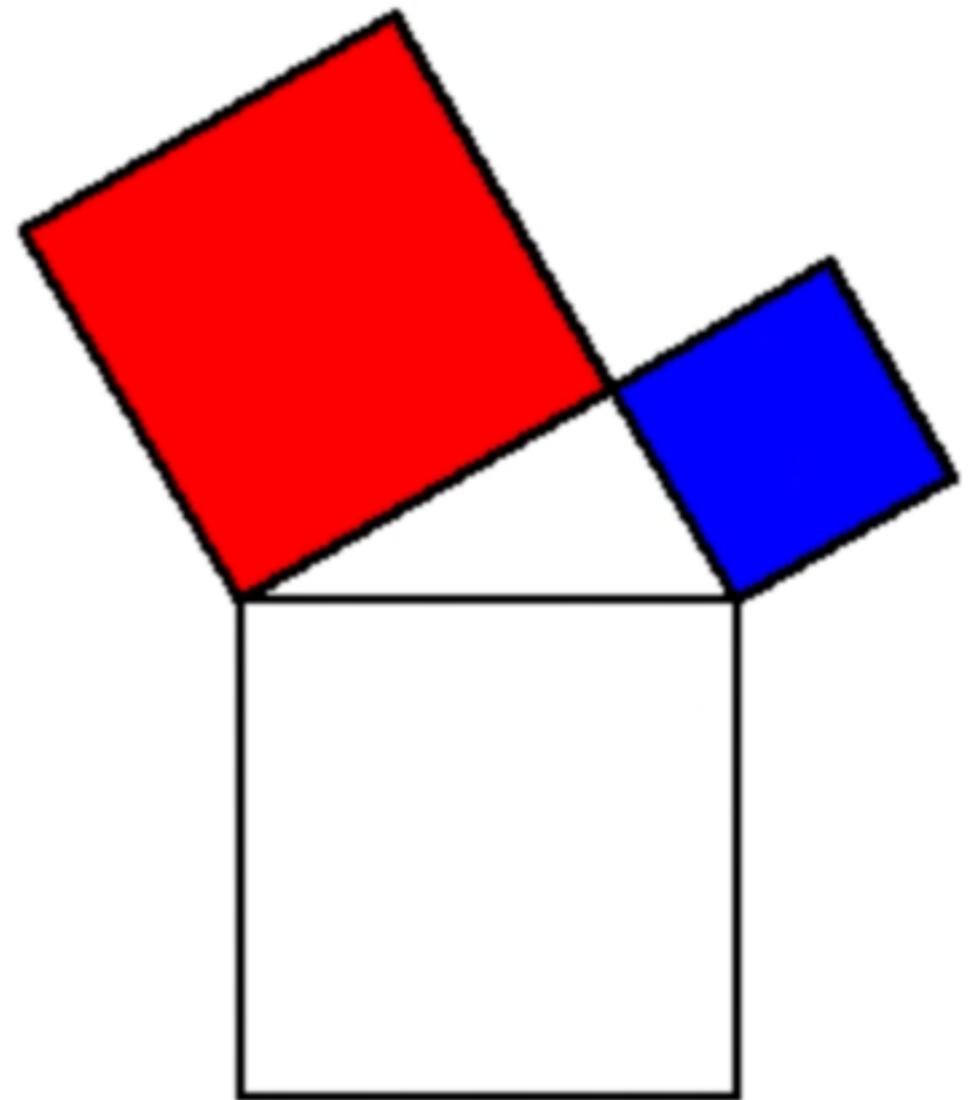
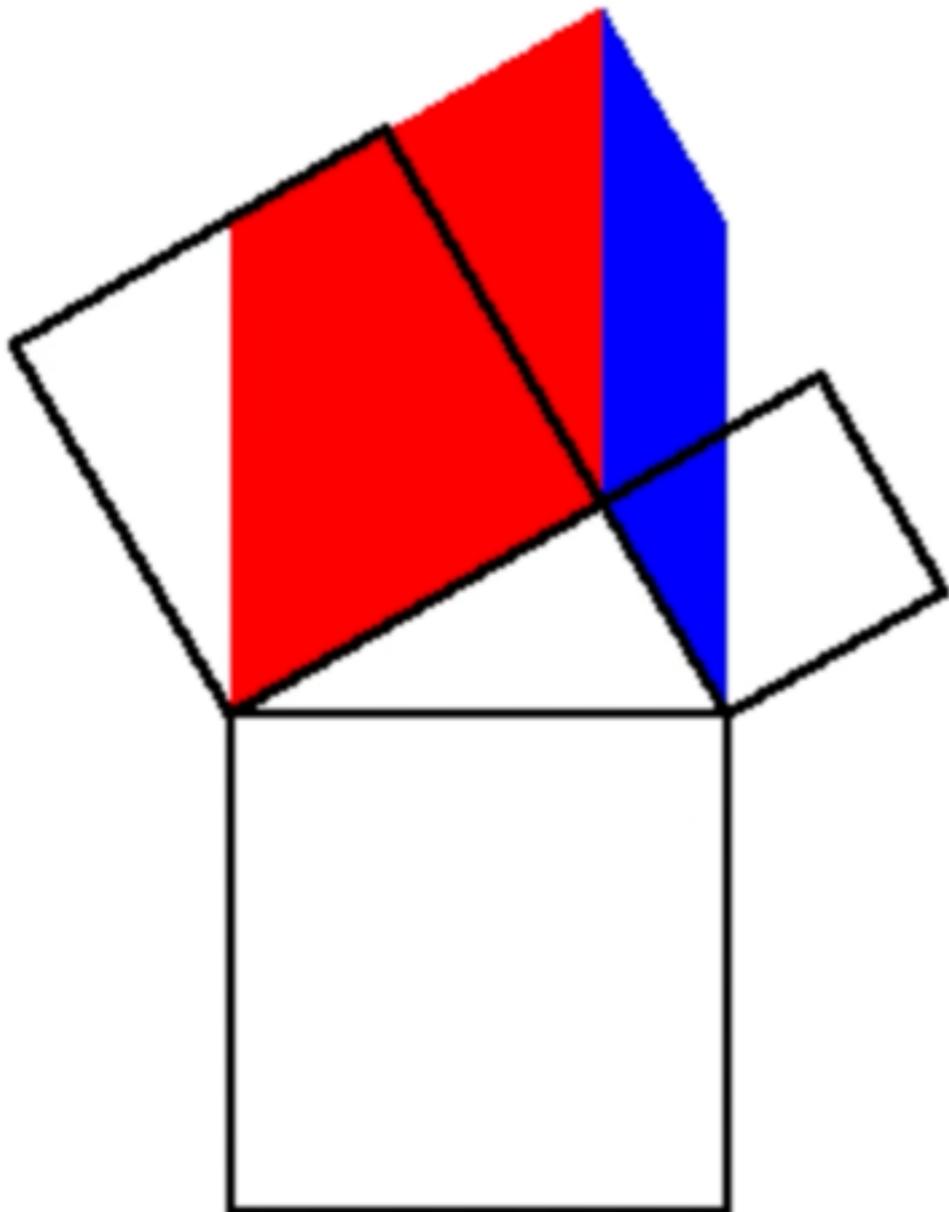
Elementos I-47



Teorema de Pitágoras







Boa Ordem!

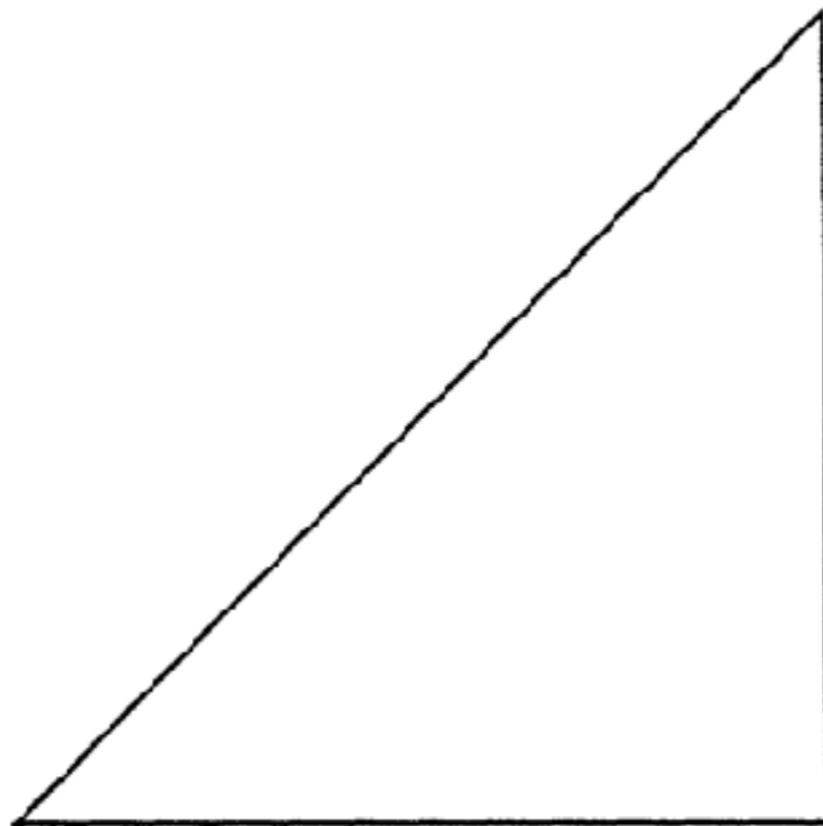
Qualquer subconjunto (não vazio) de

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

tem elemento mínimo.

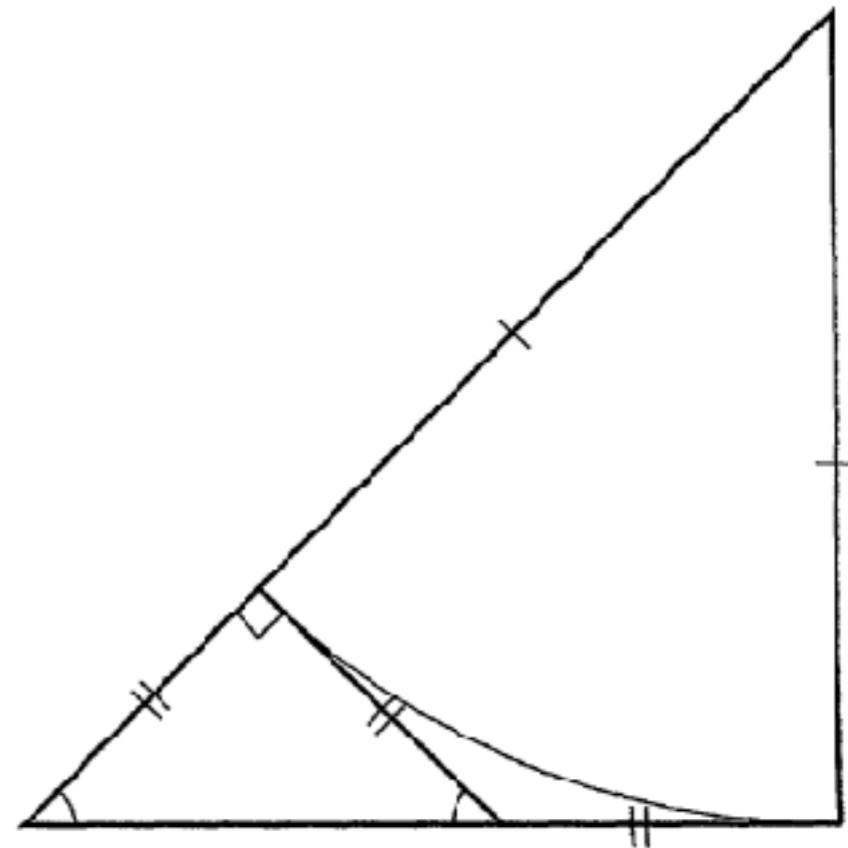
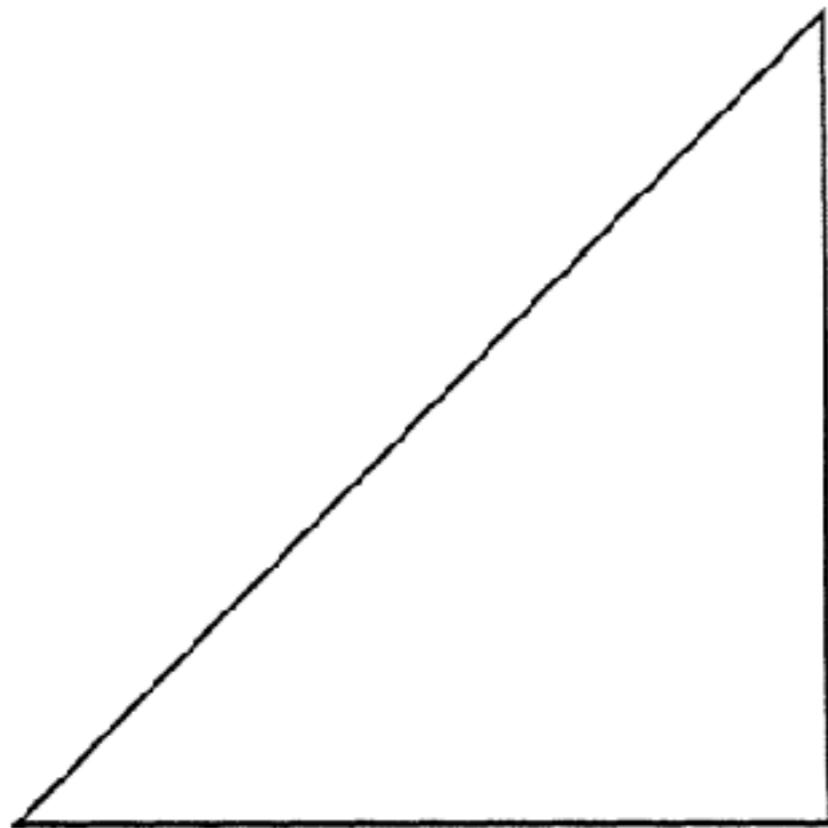
$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Se $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ então esta é a medida da hipotenusa de um triângulo rectângulo isósceles de catetos unitários.



Multiplicando por n obtemos um triângulo rectângulo isósceles de lados inteiros. Tem de haver um que é o menor de todos (na medida da hipotenusa).

Mas a construção seguinte mostra que dado um destes, obtemos um menor facilmente!



Logo, por redução ao absurdo, fica provado que a raiz de 2 não é racional.

Indução

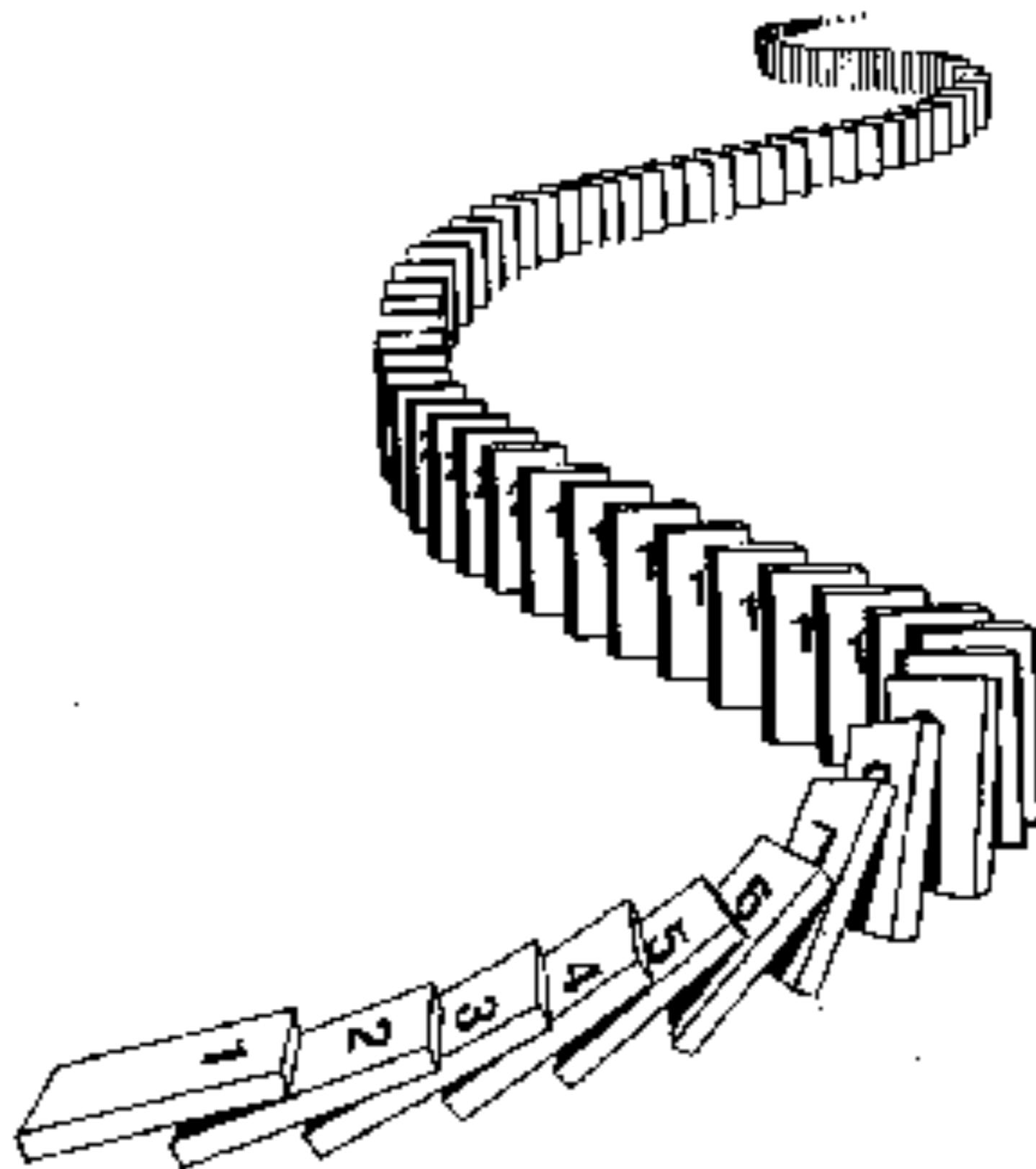
Seja S um conjunto de números naturais tal que:

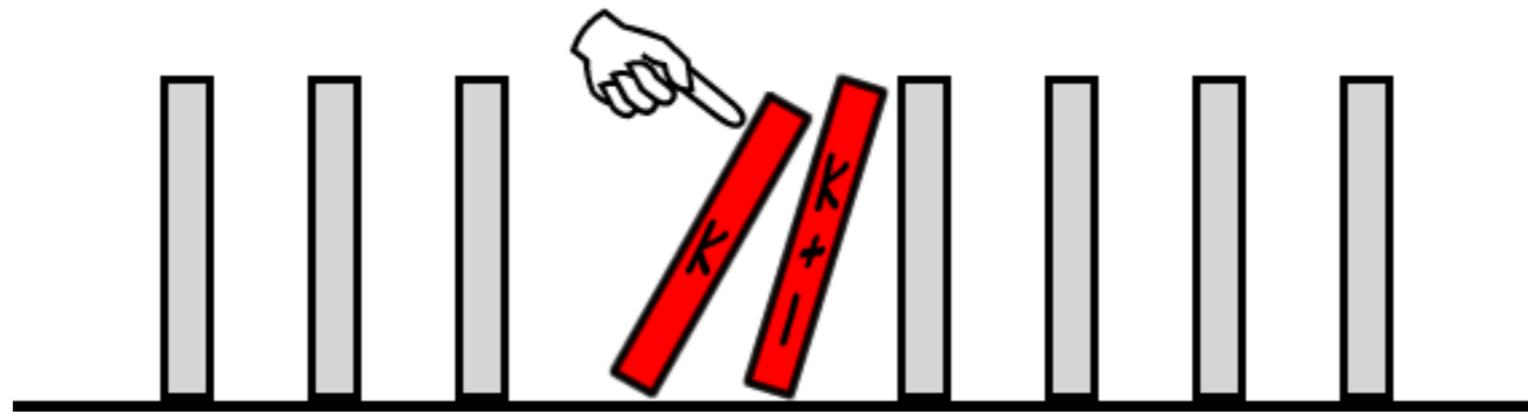
S contém o número 1.

O sucessor de qualquer elemento de S também pertence a S .

Então S é o conjunto de todos os números naturais.

[Nota: o sucessor de n é $n+1$]







gifbin.com



Princípio de Indução

$$\left. \begin{array}{l} 1 \in S \\ \forall k, k \in S \Rightarrow k + 1 \in S \end{array} \right\} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Para $n \geq 1$ temos:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 \dots + (2n-1) = n^2$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

Seja a um número real, $a > -1$. Mostre que

$$(1+a)^n \geq 1+na \qquad (n \geq 1)$$

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} \in \mathbb{N} \quad (n \geq 0)$$

A importância do caso-base na aplicação do Princípio de Indução

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} + \pi$$

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n$$

Prove que todas as mulheres loiras têm olhos azuis estabelecendo, por indução, que se num conjunto de mulheres loiras uma delas (pelo menos) tiver olhos azuis, então todas têm olhos azuis.

Isto é, para todos os números naturais n , tem-se:

Se L é um conjunto de n mulheres loiras tais que uma delas, pelo menos, tem olhos azuis, então todas as mulheres do conjunto L têm olhos azuis.

Seja S o conjunto dos números naturais para os quais a proposição é verdadeira. Relembremos o que temos de verificar:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \in S \\ \forall k, k \in S \Rightarrow k + 1 \in S \end{array} \right\} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Para o passo de indução talvez ajude notar que, por exemplo para $k=3$, se tem

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_1, a_3, a_4\}$$

Princípio de Indução Completa

$$\left. \begin{array}{l} 1 \in S \\ \forall k, 1, 2, \dots, k \in S \Rightarrow k + 1 \in S \end{array} \right\} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

No primeiro dia os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 são metidos numa caixa e, imediatamente após isso feito, o 1 é retirado.

No segundo dia entram cem números (a começar no 11) e o 2 é retirado.

No terceiro entram os mil números naturais seguintes e o menor da caixa é retirado (era o 3).

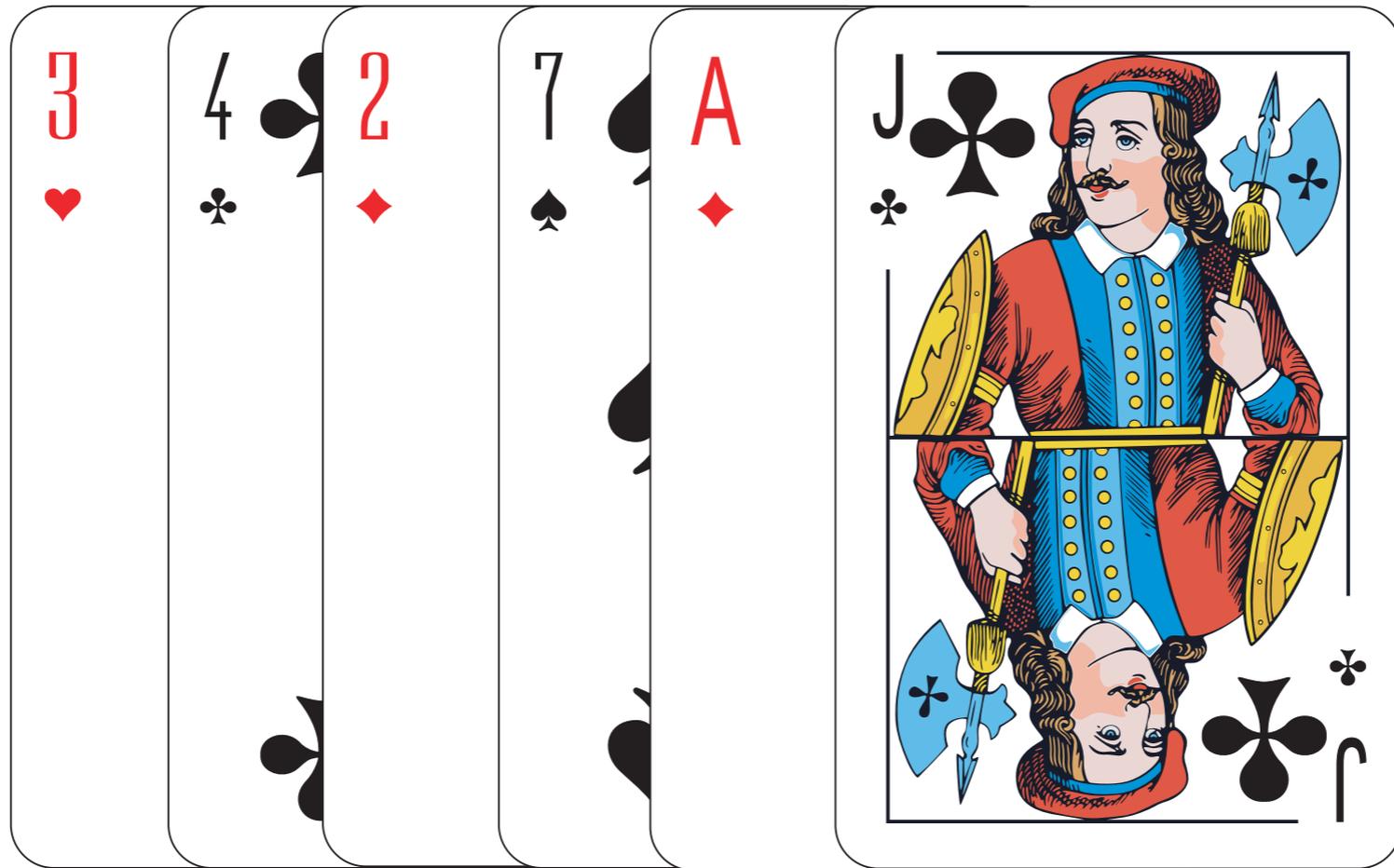
...

No n -ésimo dia entra a n -ésima potência de 10 de números e um é retirado.

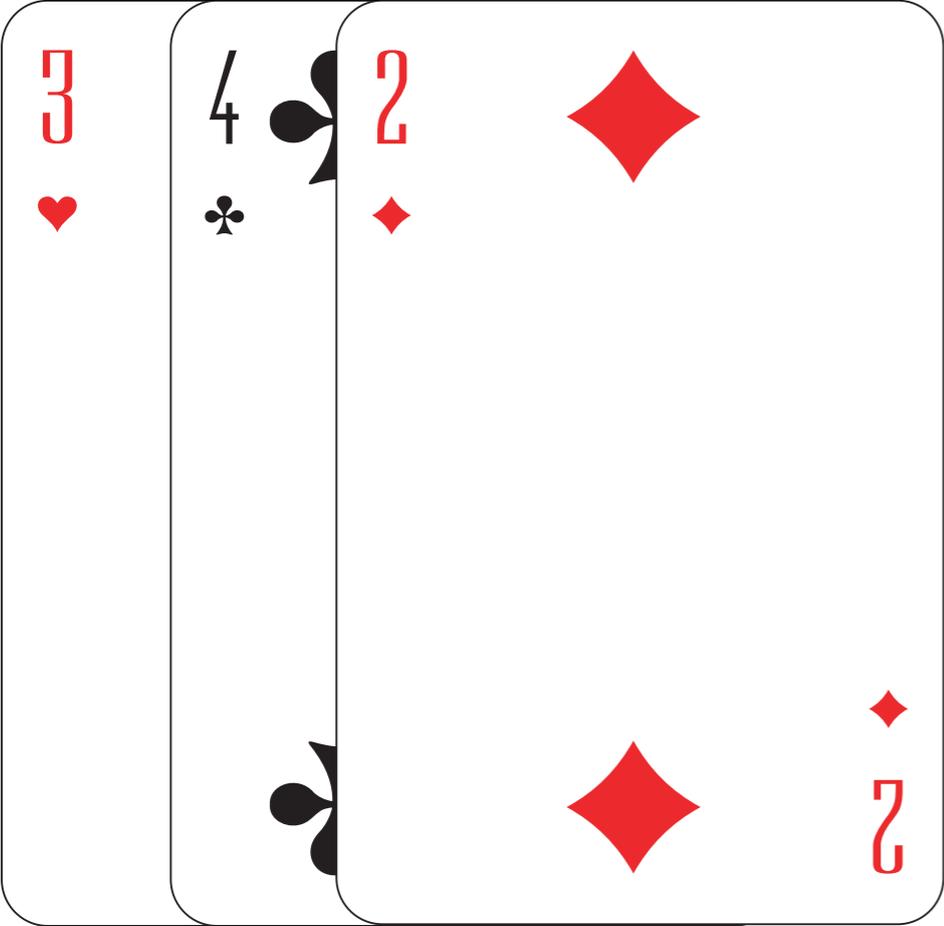
No fim dos tempos, qual é o conteúdo da caixa?...

Galbraith

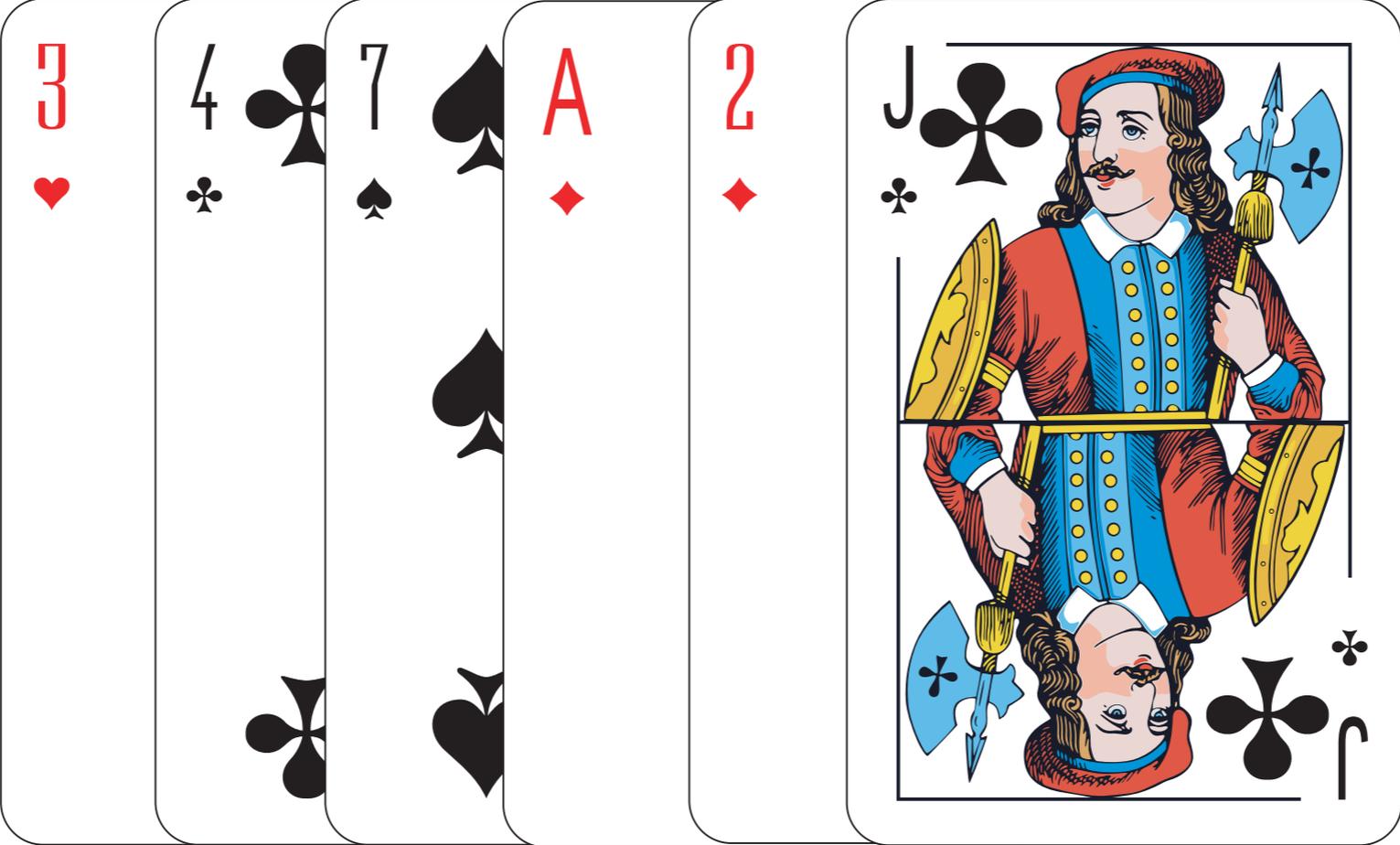
Gilbreath



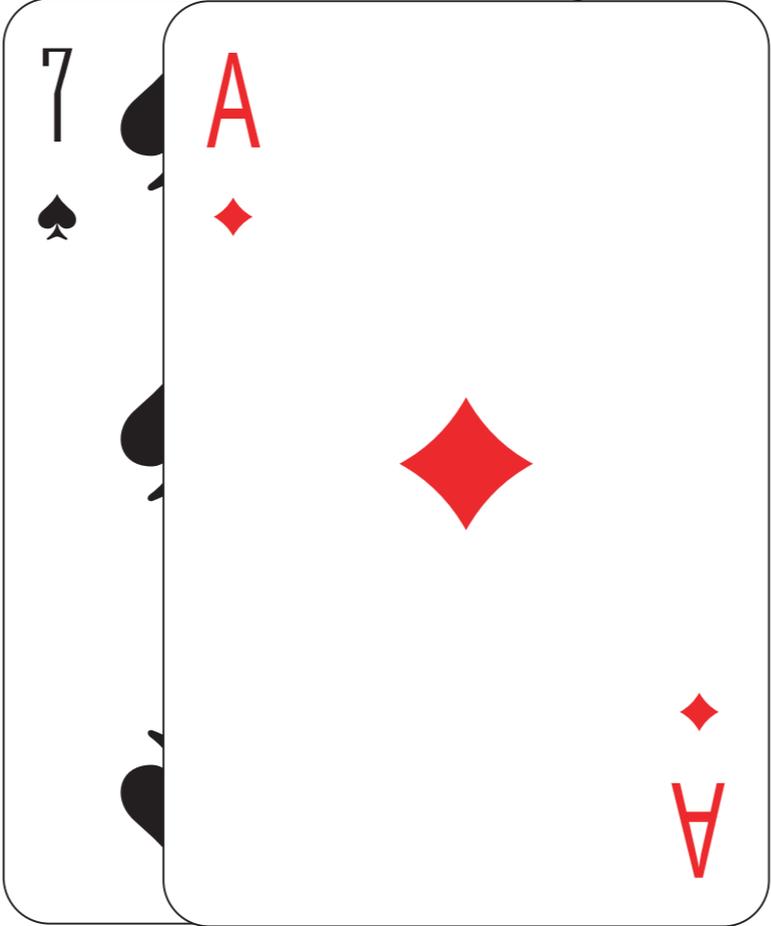
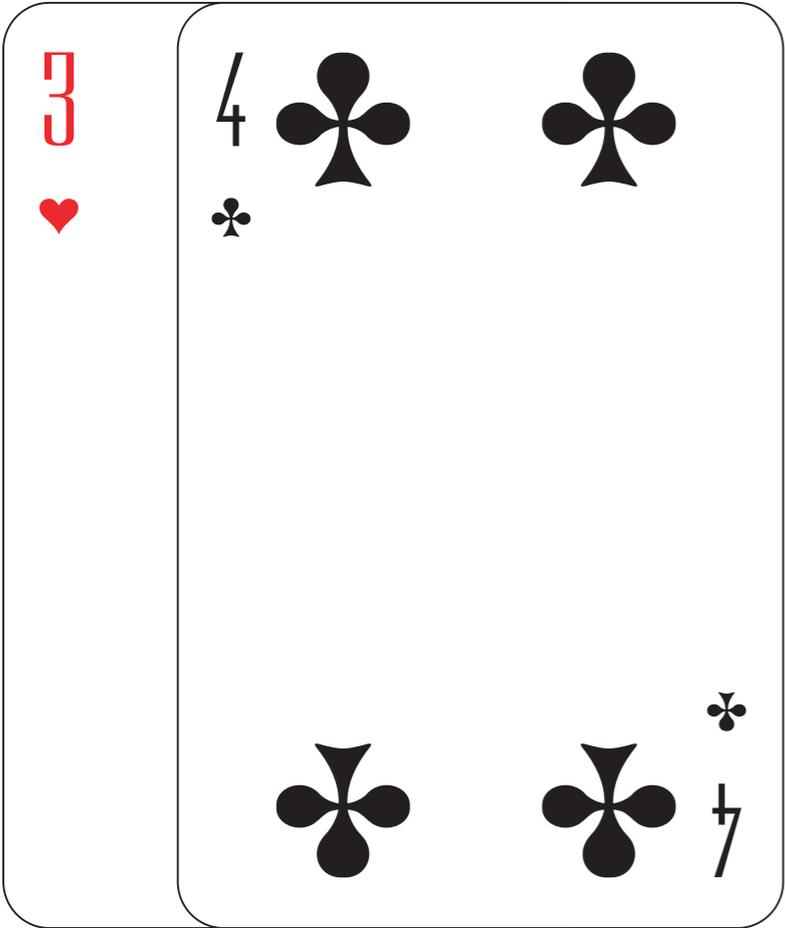
Gilbreath



Gilbreath



Gilbreath



Na ilha Penantópolis todos os habitantes nascem e vivem todas as suas vidas com um chapéu na cabeça. Os chapéus podem ser vermelhos ou azuis. Os nativos não dispõem de espelhos e não querem indagar sobre a cor do próprio penante, se bem que todos sejam muito racionais e tenham ótimas capacidades dedutivas.

A razão para este comportamento está numa lei terrível, de todos conhecida, mas a que todos parecem indiferentes: *quem souber que a cor do seu chapéu é azul deve suicidar-se logo após a reunião diária* (uma boa tradição) que sempre ocorre ao fim do dia.

A vida decorria serenamente em Penantópolis até que um naufrago deu à ilha e, numa das reuniões, tomou conhecimento dessa horrível lei. Admirado, o estrangeiro, que se chamava Fagundes, disse: “É curioso, porque vejo pelo menos uma pessoa com chapéu azul”.

Como continuará agora a vida em Penantópolis?

Vejam, se houver somente uma pessoa com chapéu azul, esta, ao ouvir o estrangeiro, e vendo somente chapéus vermelhos, deduz imediatamente que se deve suicidar.

Se forem duas as pessoas com chapéu azul, chamemos-lhes *Ara* e *Breu*, então cada uma delas vê um chapéu azul, pelo que nada sucede na primeira noite. Mas na segunda, a nativa *Ara*, ao constatar que o *Breu* não se suicidou, compreende que é azul o seu próprio chapéu. O raciocínio do *Breu* é análogo. Temos dois suicídios na segunda noite.

O que se passa é que, se houver n pessoas com chapéus azuis, então elas matam-se na n -ésima noite.

A prova faz-se por indução.

Os casos $n=1$ e $n=2$ já foram analisados.

Suponhamos que, se houver k ilhéus com chapéus azuis, eles se suicidam à k -ésima noite.

Seja agora a *Zorra* um dos $k+1$ portadores de penante azul. Ela vê k chapéus azuis e não sabe se o total é k ou $k+1$. Mas, no fim da k -ésima noite, nada sucede, e a *Zorra* compreende que isso se deve ao facto de os k portadores de chapéu azul que ela vê também verem k chapéus azuis (e não $k-1$, o que sucederia se o seu chapéu fosse vermelho). Assim, na noite seguinte, tanto a *Zorra* como todos os outros da sua condição se suicidam. QED

O que causa esta vaga de suicídios? Sem a intervenção do Fagundes nada disto sucederia. Mas a sua intervenção é trivial, ele diz algo que todos sabem (se k for maior que 1). Se ele não introduz nada de novo, o que leva as pessoas a matarem-se?

Ilustremos com o caso em que há dois chapéus azuis, dos nativos *Ara* e *Breu*. Antes do estrangeiro chegar, a *Ara* sabia que o *Breu* tinha um chapéu azul e o *Breu* sabia que a *Ara* tinha um chapéu azul. Cada um deles parece saber mais do que a afirmação do Fagundes. Mas o que a *Ara* não sabia, e passou a saber, é que o *Breu* sabe que há pelo menos um chapéu azul; de forma semelhante, o *Breu* aprende do estrangeiro que a *Ara* sabe que há pelo menos um chapéu azul. Claro que podemos trocar os papéis da *Ara* e do *Breu* entre si, o que sucede a um sucede ao outro. Cada um deles passa a poder dizer a qualquer outro: “Agora sei que sabes que há pelo menos um chapéu azul”. É esta a novidade do Fagundes!

A Ana, a Laura e a Francisca numa festa. As três amigas recebem convites que trazem também a descrição de um jogo social que será praticado quando chegarem ao local da diversão. As regras são as seguintes: Ao entrar na casa o mordomo coloca na cabeça de cada uma delas um chapéu. Este só pode ser vermelho ou azul, e a escolha é feita por moeda ao ar pelo criado. Cada uma das três não pode ver o chapéu que tem na própria cabeça, mas vê com facilidade os que couberam às outras duas amigas. Num momento preciso, simultaneamente, as três convidadas tentam adivinhar a cor do chapéu que lhes coube, ou dizem "passo!".

Se pelo menos uma acertar e nenhuma errar, ganham, em conjunto, um bilhão de euros. Caso contrário não ganham nada.

Ao ver o convite, disse a Laura: "Bom, vocês passam e eu digo uma cor à sorte. Assim temos 50 por cento de chances de ganhar uma fortuna.

"Espera", disse a Francisca, "parece-me que há maneira mais inteligente de jogar..."

O que passou pela cabeça da Francisca?

A estratégia da Laura dá 50% de hipóteses de ganhar, mas a da Francisca garante 75%. Consiste no seguinte: cada uma deve passar se vê dois chapéus de cores diferentes e, se vê dois da mesma cor, deve apostar na cor contrária. Uma análise de todos os casos possíveis, 8, mostra que esta forma de jogar ganha em 6.

Um rei perverso tem por hábito colocar um puzzle aos condenados, mesmo antes de estes serem executados. Os que se saírem bem são poupados. Neste dia havia três condenados ao garrote. O rei mandou colocá-los em fila, de forma que o preso 3 vê o 1 e o 2, o segundo só vê o primeiro e este não tem qualquer contacto visual com os demais.

Disse o rei: "Há três chapéus vermelhos e dois azuis, e é desses que vou tirar três e distribuir por vocês. Quem souber a cor do chapéu que lhe coube não será executado, antes partirá livre. Mas tem de ter a certeza absoluta e ser capaz de explicar as suas conclusões. Responda primeiro o prisioneiro 3, depois o 2 e finalmente o 1."

E assim foi, o preso 3, por não saber a cor do chapéu que lhe coubera, foi morto. O número 2 teve igual sorte. Mas o prisioneiro 1 salvou-se! Como?

O que pensou o prisioneiro 1: para o 3 morrer é porque não viu dois azuis, e, sabendo isto, o 2 só morreu porque não viu um azul, portanto o 2 viu um chapéu vermelho, o meu.

Outro rei, outros condenados, o mesmo vício do jogo. As regras são bem conhecidas dos prisioneiros, que se reúnem mesmo antes de o jogar, para tentar escolher uma boa estratégia (se é que existe uma!). Desta vez são colocados chapéus em todos os 38 condenados, que podem ser vermelhos ou azuis. Cada um vê os chapéus dos outros, mas não o próprio. A um sinal do rei todos devem tentar adivinhar a cor do seu chapéu. Quem acertar vive, quem errar morre. O jogo efectuou-se e 19 presos sobreviveram. Disse o rei: "Tivestes sorte!" Respondeu Spartacus, um dos sobreviventes: "Nunca matarás mais de metade de nós!"

Poderá Spartacus ter razão?

Os jogadores organizam-se em pares. Para cada par (x,y) o prisioneiro x diz a cor do chapéu que vê em y , e y diz a cor contrária à do chapéu que vê em x . Assim, se o par tiver dois chapéus da mesma cor, salva-se x , se tiverem cores diferentes, salva-se y . Assim, metade sobrevive, e Spartacus tem razão.

O rei da estória anterior irritou-se e, no dia de execuções seguinte, mudou as regras. Agora os 59 prisioneiros são colocados em fila. Cada um recebe um chapéu que pode ser vermelho ou azul. O último da fila (o 59) vê todos os outros, o 58 vê todos menos o 59, etc. Começando pelo 59, cada preso deve tentar adivinhar a cor do seu chapéu. Se acertar, vive, se errar morre. Mas a execução só é efectuada no dia seguinte. Por isso, cada preso ouve os palpites dos prisioneiros que o precedem, mas não sabe se são bons ou maus. Isto é, o prisioneiro genérico, na posição i , vê os chapéus dos presos $1, 2, \dots, i - 1$ e ouve os palpites dos presos $i + 1, i + 2, \dots, 59$. O rei concede uma reunião aos 59 condenados antes do jogo fatal. Desta vez, pelo aspecto feliz dos prisioneiros, poucos irão morrer.

Quantos se podem, de certeza, salvar?

O último prisioneiro, que é o primeiro a falar, grita "vermelho" se vir um número ímpar de chapéus vermelhos, e grita "azul" se vir um número par de chapéus vermelhos. Assim, o próximo prisioneiro já pode deduzir a cor do seu chapéu assim como todos os outros. No máximo, morrerá um prisioneiro!

Vinte e três prisioneiros chegam a uma cadeia onde o carcereiro lhes explica as regras da casa, antes de lhes permitir uma reunião geral, ao que se seguirá o confinamento em celas individuais sem possibilidade de comunicação.

Há uma sala na cadeia onde se encontram dois interruptores, que não servem para nada de especial, cada um tem duas posições possíveis: ON e OFF. Quando lhe apetece, o carcereiro escolhe aleatoriamente um prisioneiro, leva-o a esta sala, onde o detido deve escolher um dos interruptores e alterar o seu estado (de ON para OFF, ou de OFF para ON), após o que será devolvido à sua cela. Não se conhece o estado inicial dos interruptores. O carcereiro garante que todos os prisioneiros irão a esta sala uma infinidade de vezes. Se, em qualquer altura, algum prisioneiro disser que está convencido de que já todos visitaram esta sala pelo menos uma vez, vão todos em liberdade (se tal corresponder à verdade) ou são todos fuzilados (se for mentira).

Há alguma estratégia, que os presos possam combinar na reunião, que lhes garanta a libertação?

Os prisioneiros, na sua reunião prévia, escolhem um deles, chamemos-lhe α . Sejam os interruptores designados por A e B. Cada vez que um prisioneiro, que não seja o α , for à sala dos interruptores, deve mudar o A para ON se estiver OFF, caso contrário deve alterar o estado do B. Mas só deve efectuar esta operação no A duas vezes, a partir daí deve sempre operar no B. O α , de cada vez que encontrar o A ON deve alterá-lo para OFF e contabilizar esse movimento, se o A estiver OFF, deve alterar o B.

Resumindo, o A serve para o α contar as idas dos outros prisioneiros à sala, o B só serve para cumprir a obrigatoriedade de alterar um interruptor quando se escolhe não mexer no A.

Quando a contagem do α atingir 44, ele estará certo que todos os presos já se deslocaram à sala. É necessário recorrer a esta tática de contar cada prisioneiro duas vezes porque não se conhece o estado inicial de A. Ao atingir 44, ou 22 mudaram A (duas vezes cada um), que no início estava OFF, de OFF para ON, ou 21 o mudaram duas vezes e um uma vez, se no começo A estava ON. De qualquer forma, há a certeza de todos terem visitado a sala em questão.

PRINCÍPIO DAS GAVETAS



Se tivermos $n+1$ objectos e n gavetas... então pelo menos uma gaveta ficará com mais do que um objecto!

Objecto = carta de jogar

Gaveta = naipe

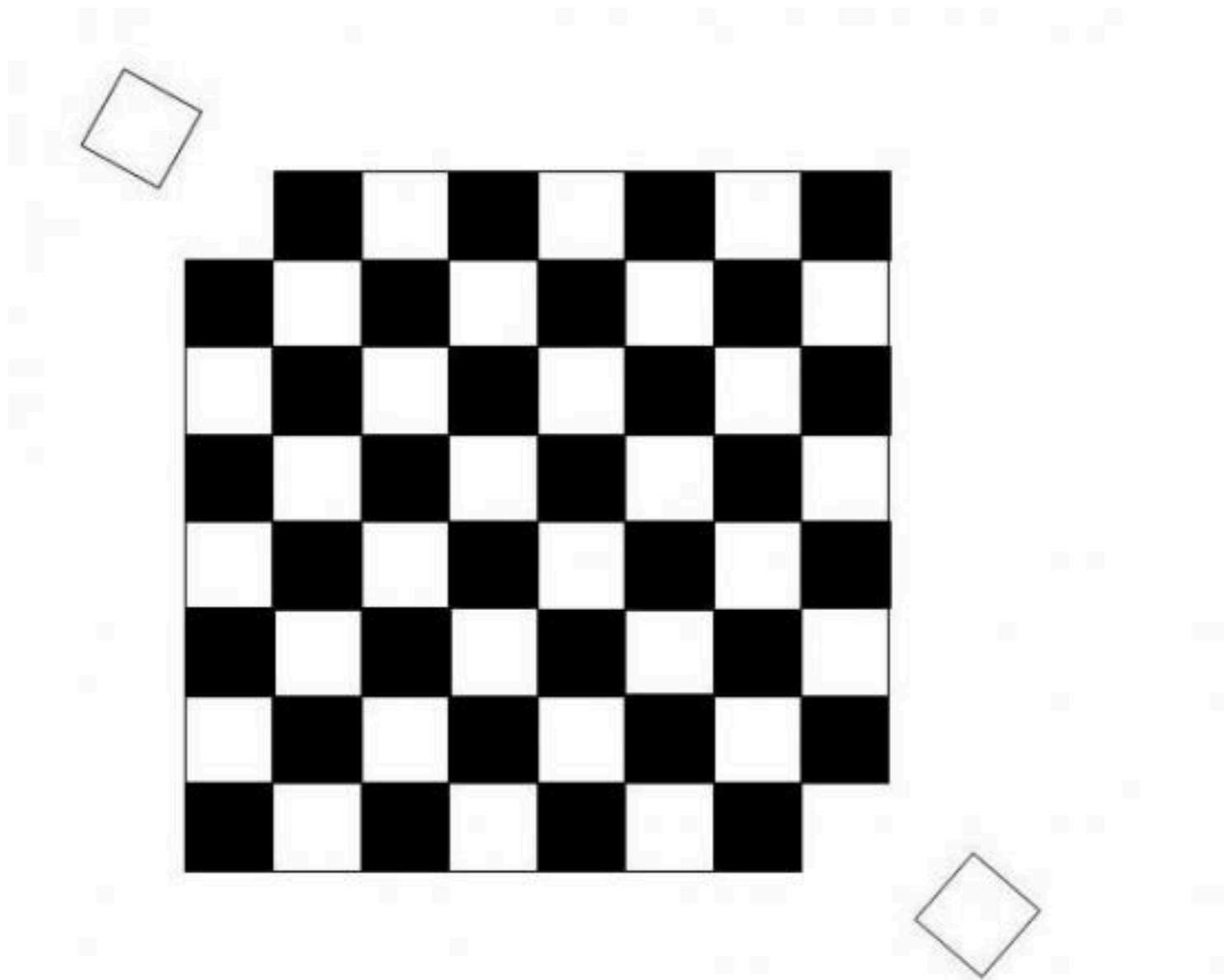
Ficamos a saber que em cada 5 cartas há repetição de naipe!

Em Lisboa há pelo menos duas pessoas com o mesmo número de cabelos na cabeça (carecas não contam).

Ninguém tem mais de 300 000 cabelos.
Há 1 000 000 de não carecas em Lisboa.

Suponha que tem um conjunto com 51 números diferentes, todos de 1 a 100. Prove que dois desses números somam exatamente 100.

$S_1 = \{1, 99\}, \dots, S_{49} = \{49, 51\}, S_{50} = \{50\}$ são as gavetas



É possível pavimentar o tabuleiro mutilado com peças de dominó?