

Elementos de Geometria

Exame Final

Jorge Nuno Silva

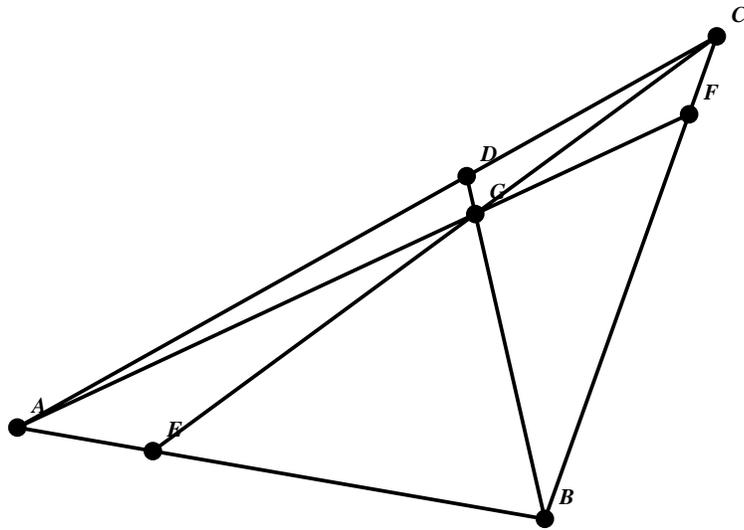
29 de Junho de 2007

1. (a) Enuncie o Teorema Fundamental da Geometria Afim.
(b) Determine uma transformação afim t que verifique $t(0, 1) = (1, 0)$, $t(2, 0) = (1, 1)$, $t(2, 1) = (0, 2)$, ou mostre que tal transformação não existe. Qual é a imagem da recta $y = 3x$ por t ?
2. Determine uma equação da Recta que contém os Pontos
(a) $[3, 2, 1]$, $[1, 4, 3]$.
3. Seja π o plano de imersão $x + y + z = 9$.
(a) Quais são os Pontos ideais de π ?
(b) Qual é o ponto de π que representa o Ponto $[2, 2, 1]$?
(c) Qual é o Ponto correspondente ao ponto de π de coordenadas $(5, 0, 4)$?
(d) Determine a recta que representa em π a Recta $x - y = 0$.
(e) Determine a Recta que corresponde à recta de π que contém os pontos $(9, 0, 0)$, $(3, 3, 3)$.
4. A seguinte transformação $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é uma transformação projectiva? Justifique a sua resposta.

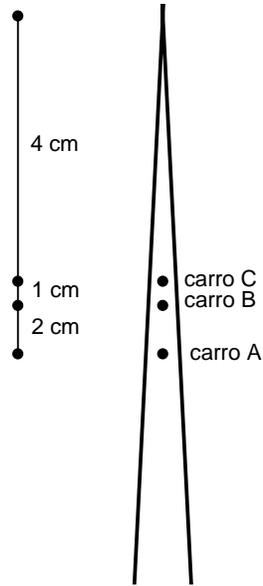
$$[x, y, z] \mapsto [2y + z, x - 2y + 3z, 5y - 4z].$$

5. Determine o cross-ratio $(ABCD)$ dos Pontos com coordenadas homogéneas $A = [1, 1, \frac{3}{2}]$, $B = [2, 3, 3]$, $C = [8, 1, 12]$, $D = [12, -3, 18]$.
6. A transformação t é definida por $t(x, y) = (2x - y, 3y - x)$

- (a) t é euclidiana? Justifique.
- (b) t é afim? Justifique.
- (c) Determine a imagem da recta $y = -x$ por t .
7. (a) Enuncie o Teorema de Ceva.
- (b) Na figura abaixo, no $\triangle ABC$, os segmentos AF , BD e CE são concorrentes em G . Se os comprimentos verificam $DA=2CD$ e $EB=3AE$, mostre que $BF=6FC$.



8. A figura mostra a fotografia aérea de três carros (A, B, C) que se afastam ao longo de uma estrada que parece desaparecer ao longe. As distâncias à esquerda referem-se à fotografia. Sabendo que a distância real entre os carros A e C é de 10 km, qual é a distância real a que o carro B está do carro C? Justifique.



9. Considere o conjunto X dos pontos do plano \mathbb{R}^2 com coordenadas inteiras,

$$X = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Defina uma geometria cujo conjunto de pontos seja X .