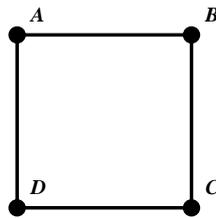


# EXAME DE GEOMETRIA

Jorge Nuno Silva

17 de Junho de 2005

1. Considere um quadrado  $Q$  no plano, isto é, o conjunto de quatro segmentos como na figura abaixo.



Dê exemplo de uma geometria cujo conjunto de pontos seja  $Q$ .

2. Determine uma transformação afim  $t$  que verifique  $t(0, 0) = (0, 1)$ ,  $t(1, 0) = (1, 1)$ ,  $t(0, 1) = (0, 2)$ , ou mostre que tal transformação não existe. Qual é a imagem da recta  $y = 2x$  por  $t$ ?
3. Determine uma equação da Recta que contém os Pontos
  - (a)  $[0, 5, 1]$ ,  $[1, 4, 3]$ .
  - (b)  $[2, 3, 1]$ ,  $[1, 2, 3]$ .
4. Seja  $\pi$  o plano de imersão  $x + y + z = 1$ . Quais são os Pontos ideais de  $\pi$ ? Qual é o ponto de  $\pi$  que representa o Ponto  $[1, 2, 1]$ ?
5. A seguinte transformação  $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  é uma transformação projectiva? Justifique a sua resposta.

$$[x, y, z] \mapsto [2x - 3y, 2x - z, x + y - z].$$

6. Determine o cross-ratio  $(ABCD)$  dos Pontos com coordenadas homogêneas  $A = [2, 2, 3]$ ,  $B = [2, 3, 3]$ ,  $C = [16, 2, 24]$ ,  $D = [12, -3, 18]$ .
7. Determine as imagens, relativamente à inversão na circunferência unitária, dos seguintes conjuntos.
- Pontos  $(3, 3)$ ,  $(-4, 1)$ ,  $(-4, 0)$ ,  $(-3, -3)$
  - Circunferência de centro  $(2, 2)$  e raio  $2\sqrt{2}$ .
  - Circunferência de centro  $(1, 1)$  e raio  $1/2$ .
  - Recta  $x - y = 1$
  - Recta  $x - y = 0$
8. Seja  $t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$t(z) = i\bar{z} - 1 + i.$$

- Mostre que  $t$  é uma isometria.
  - Interprete  $t$  como composição de uma reflexões, rotação e translação.
  - Interprete  $t$  como composição de reflexões.
9. No quadrilátero  $ABCD$ ,  $AB$  e  $CD$  encontram-se em  $P$ ,  $AD$  e  $BC$  encontram-se em  $Q$ . As diagonais  $AC$  e  $BD$  encontram  $PQ$  em  $X$  e  $Y$ , respectivamente.
- Mostre que  $\frac{PX}{XQ} = -\frac{PY}{YQ}$ .

