ELEMENTOS DE GEOMETRIA 2k3/2k4
Teste 2

Jorge Nuno Silva

12 de Dezembro de 2003

1. Alguma das transformações seguintes é projectiva? Em caso afirmativo identifique a respectiva matriz e a imagem do Ponto $[1, 2, 3]$.

   (a) $t_1 : [x, y, z] \mapsto [y - z, y + z, 2 + x]$.

   (b) $t_2 : [x, y, z] \mapsto [y - z, y + z, y + z]$.

   (c) $t_3 : [x, y, z] \mapsto [y - z, y + z, x]$.

2. Seja ℓ_1 a Recta de $\mathbb{RP}^2$ que contém $[1, 2, -2]$ e $[3, 0, 3]$, e seja ℓ_2 a Recta de $\mathbb{RP}^2$ que contém $[2, 1, -1]$ e $[1, 0, 2]$. Determine a intersecção de ℓ_1 com ℓ_2.

3. Determine uma transformação projectiva t tal que: $t([1, 0, 1]) = [2, 1, 0]$, $t([1, 1, 0]) = [2, 1, 1]$, $t([1, 1, 1]) = [0, 2, 1]$, $t([0, 2, 3]) = [3, 0, 1]$.

4. Sejam $A = [1, 1, 2]$, $B = [1, 0, 1]$, $C = [0, 1, 1]$, $D = [-1, 1, 0]$. Determine

   (a) $(ABCD)$.

   (b) $(ACBD)$.

   (c) $(ADBC)$.

   (d) $(ACDB)$.

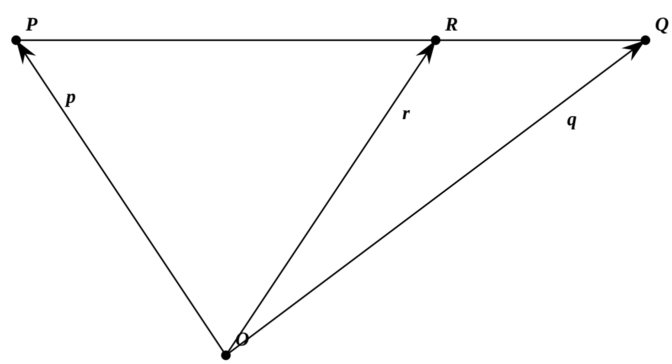
5. Determine a imagem da Recta $x + 3y + 2z = 0$ pela transformação projectiva associada à matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

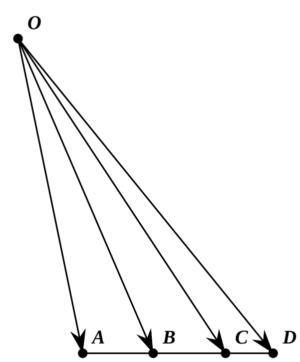
6. Considere as Rectas ℓ_1 e ℓ_2 de equações, respectivamente, $x = -z$ e $x = z$. Determine as suas representações nos planos de imersão π_1 e π_2 de equações, respectivamente, $z = -1$, $y = -1$. Comente brevemente o resultado obtido.

7. Enuncie e demonstre o dual do Teorema de Desargues.

8. Relembre que, em $\mathbb{R}^3$, se tiver o segmento PQ, a unir os pontos associados aos vectores posição p e q, o vector posição, r, do ponto R, que divide PQ na proporção $(1-\lambda) : \lambda$ é $r = \lambda p + (1-\lambda)q$.



(a) Mostre que, dados quatro vectores posição complanares a, b, c, d



se tem $c = \lambda a + (1-\lambda) b$ com $\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{AC}{CB}$, e $d = \mu a + (1-\mu) b$ com

$\frac{1-\mu}{\mu} = \frac{AD}{DB}$.

(b) Num plano de imersão os pontos A, B, C, D estão sobre uma recta com distâncias $AB = 1$, $BC = 3$, $CD = 2$. Determine $(ABCD)$, $(BACD)$, $(ACBD)$.