TESTE 1 DE GEOMETRIA

Jorge Nuno Silva

2 de Maio de 2003

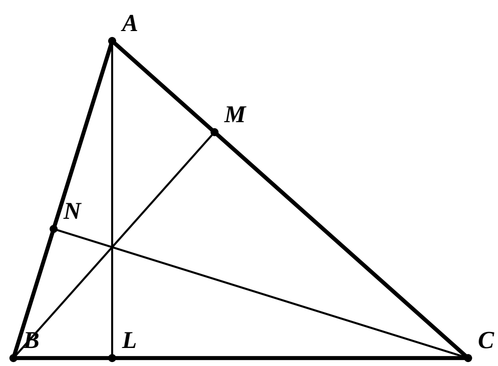
1. Seja $\mathcal{F}$ a família de parábolas $\{(x,y) : y^2 = 4a(x+a)\}$ (a toma todos os valores reais positivos), e $\mathcal{G}$ a família $\{(x,y) : y^2 = 4a(-x+a)\}$ (a toma todos os valores reais positivos). Mostre que se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{G}$, então em cada ponto de intersecção de F com G a intersecção é ortogonal.

2. Classifique a seguinte cónica, e determine o seu centro, caso exista.

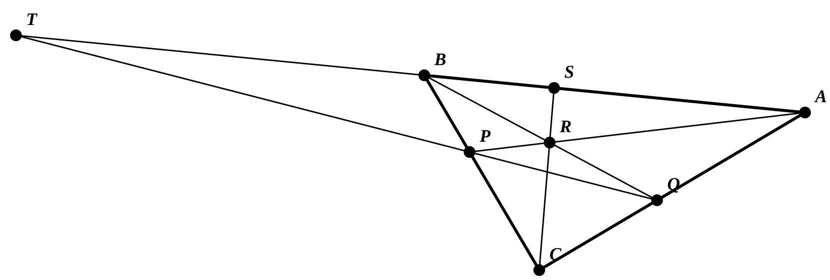
$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0\,.$$

3. (a) Determine uma transformação afim t, tal que $t(1,-1) = (2,-2)$, $t(3,-4) = (8,13)$, $t(3,4) = (0,-1)$.
   (b) Poderia obter uma transformação euclidiana na alínea anterior? Porquê?
   (c) Quantas transformações afins pode obter para a alínea a)? Porquê?
   (d) Determine a imagem da recta $y = 2x + 1$ por t.

4. Mostre que as alturas de um triângulo são concorrentes.

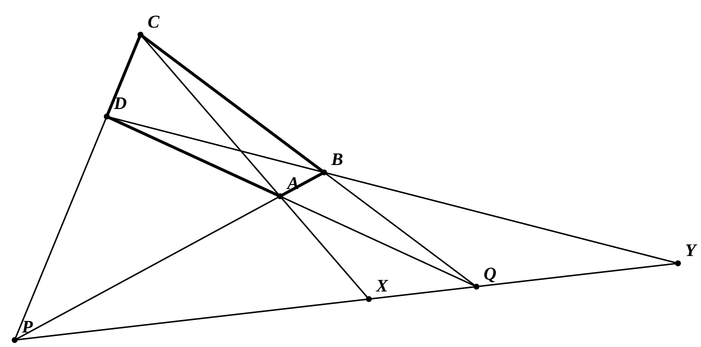

A
M
N
B
L
C

5. No triângulo rectângulo ABC, P e Q estão em BC e AC, respectivamente, de forma a que CP=CQ=2. Pelo ponto de intersecção de AP e BQ, R, e por C, passa uma recta que encontra AB em S. PQ encontra AB em T. Se a hipotenusa AB mede 10 e AC mede 8, quanto mede TS?



6. No quadrilátero ABCD, AB e CD encontram-se em P, AD e BC encontram-se em Q. As diagonais AC e BD encontram PQ em X e Y, respectivamente.

   Mostre que $\frac{PX}{XQ} = -\frac{PY}{YQ}$.



7. (a) Determine uma transformação projectiva t tal que

$t([-1,0,0]) = [2,1,0]$, $t([-3,2,0]) = [1,0,-1]$, $t([2,0,4]) = [0,3,-1]$, $t([1,2,-5]) = [3,-1,2]$.

(b) Determine a imagem da Recta $2x + y + 3z = 0$ por t.