

GEOMETRIA – Exercícios

Mestrado em Educação - DMFCUL

2002/2003

1. Determine a equação da circunferência com centro $(2, 1)$ e raio 3.
2. Determine os pontos de intersecção da recta $y = x + 2$ com a circunferência do exercício anterior.
3. Determine se as circunferências

$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 4y + 2 = 0, x^2 + y^2 - 4x + 2y$$

se intersectam ortogonalmente. Determine a equação da recta que contém os pontos de intersecção.

4. Seja E a parábola $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) com equação paramétrica $x = at^2$, $y = 2at$ e foco F . Sejam P, Q pontos de E , correspondentes a valores do parâmetro t_1, t_2 , respectivamente.
 - (a) Se PQ define um ângulo recto no vértice da parábola, O , mostre que $t_1 t_2 = -4$.
 - (b) Se $t_1 = 2$ e PQ é perpendicular a OP , mostre que $t_2 = -4$.
5. Considere a hipérbole rectangular $xy = c^2$ ($c > 0$) de equação paramétrica $x = ct, y = c/t$. Sejam P, Q pontos da hipérbole, correspondentes a valores do parâmetro t_1, t_2 , respectivamente.
 - (a) Determine a equação da corda PQ .
 - (b) Determine as coordenadas do ponto N , em que a corda encontra o eixo dos xx .
 - (c) Determine o ponto médio de PQ .
 - (d) Mostre que $OM = MN$ (O é a origem)

6. Determine o declive da tangente ao cicloide com equações paramétricas

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

no ponto correspondente a t ($t \neq$ múltiplo de π).

7. Determine a equação da tangente à curva de \mathbb{R}^2

$$x = 1 + 4t + t^2, \quad y = 1 - t$$

no ponto correspondente a $t = 1$.

8. Seja P um ponto da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b > 0, b^2 = a^2(1 - e^2), 0 < e < 1).$$

- (a) Se P tem coordenadas $(a \cos t, b \sin t)$, determine a equação da tangente à elipse em P .
- (b) Determine as coordenadas do ponto T onde a tangente da alínea anterior encontra a directriz $x = a/e$.
- (c) Seja F o foco com coordenadas $(ae, 0)$. Mostre que $PF \perp TF$.

9. A recta vertical que passa num ponto P de uma hipérbole H

$(x = 2 \sec t, y = 3 \tan t)$ encontra o eixo dos xx em N . A tangente a H em P encontra o eixo dos xx em T .

- (a) Determine as coordenadas de N .
- (b) Determine as coordenadas de T .
- (c) Mostre que $ON \cdot OT = 4$ (O é a origem).

10. Seja P um ponto da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b > 0, b^2 = a^2(1 - e^2), 0 < e < 1).$$

- (a) Se P tem coordenadas $(a \cos t, b \sin t)$, determine a equação da normal à elipse em P .
- (b) Determine as coordenadas do ponto Q onde a normal da alínea anterior encontra o eixo dos yy .
- (c) Seja F o foco com coordenadas $(ae, 0)$. Mostre que $QF = e \cdot PF$.

11. Classifique as cónicas seguintes. Determine os respectivos centros/vértices e eixos.

(a) $x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 5y + 2 = 0$.

(b) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 7 = 0$.

(c) $x^2 + xy + 4y^2 + 3x - 9 = 0$.

(d) $x^2 + 2xy + y^2 - 7x + 3 = 0$.

(e) $2x^2 - xy - 2y^2 - 2 = 0$.

12. Considere o $\triangle ABC$ com $AB = AC$. Mostre que $\angle ABC = \angle ACB$.

[Sugestão: Considere a reflexão em relação à bissetriz de $\angle BAC$]

13. Determine quais das seguintes transformações $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são euclidianas.

(a) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

14. As transformações euclidianas t_1 e t_2 são dadas por

$$t_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Determine a composição $t_1 \circ t_2$.

15. Determine as inversas das seguintes transformações euclidianas.

(a) $t(x) = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

16. Determine $t_2^{-1} \circ t_1$, onde

$$t_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

17. Determine quais das seguintes transformações são afins.

(a) $t(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $t(x) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $t(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x$

18. Em cada caso dê um exemplo, caso exista. Justifique.

(a) Uma transformação afim que não é euclidiana.

(b) Uma transformação euclidiana que não é afim.

(c) Uma transformação afim e euclidiana.

(d) Uma transformação injectiva que não é euclidiana nem afim.

19. Determine $t_1 \circ t_2$, $t_2 \circ t_1$, $t_1 \circ t_1$, onde

$$t_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

20. Determine as inversas das transformações afins.

(a) $t(x) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $t(x) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

21. Mostre que a transformação $t(x) = 3x$ é afim, mas não uma projecção paralela.

22. Quais das seguintes são propriedades afins?

(a) Distância.

(b) Colinearidade.

(c) Circularidade.

(d) Medida de ângulo.

(e) Ponto médio de segmento.

23. A transformação afim t é definida por

$$t(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

determine as imagens das rectas

- (a) $y = -2x$
- (b) $2y = 3x - 1$

24. A transformação afim t é definida por

$$t(x) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

determine as imagens das rectas

- (a) $2x - 5y + 3 = 0$
- (b) $3x + y - 4 = 0$

25. Determine a transformação afim que transforma os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ nos pontos

- (a) $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, respectivamente.
- (b) $(-4, -5)$, $(1, 7)$, $(2, -9)$, respectivamente.

26. Determine a transformação afim que transforma os pontos $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$ nos pontos $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 7)$, respectivamente.

27. Determine a transformação afim que transforma os pontos $(1, -1)$, $(5, -4)$, $(-2, 1)$ nos pontos $(1, 1)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$, respectivamente.

28. Os pontos P, Q, R, R estão sobre uma recta, por esta ordem. As distâncias entre eles são 4, 2, 3 unidades, respectivamente. Determine as razões $PR : RS$ e $PS : SQ$.

29. Um ponto X está dentro do $\triangle ABC$, e as rectas AX , BX e CX encontram os lados opostos do triângulo nos pontos P , Q e R , respectivamente. As razões $AR : AB$, e $BP : BC$ são $1 : 5$ e $3 : 7$, respectivamente. Determine a razão $AC : AQ$.

30. Uma recta ℓ atravessa os lados, AB , BC e CA de um $\triangle ABC$ em R , P e Q , respectivamente. As razões $BC : CP$ e $CQ : QA$ são $3 : 2$ e $1 : 3$, respectivamente. Determine a razão $AR : RB$.

31. $ABCD$ é um paralelogramo, e o ponto P divide AB na razão $2 : 1$; as rectas AC e DP encontram-se em Q , e as rectas BQ e AD encontram-se em R .
- Determine as imagens dos pontos P , Q e R pela transformação afim t que transforma A , D e C em $(0, 1)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$, respectivamente.
 - Considerando a imagem de $ABCD$ por t , determine as razões $BQ : QR$ e $AR : RD$.
32. O $\triangle ABC$ tem vértices $A(-1, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(3, 1)$. Os pontos $P(1, \frac{1}{3})$, $Q(1, \frac{3}{2})$ e $R(-\frac{5}{3}, 1)$ estão sobre BC , CA e AB , respectivamente.
- Determine as razões em que P , Q e R dividem os lados do triângulo.
 - Determine se AP , BQ e CR são concurrentes.
33. O $\triangle ABC$ tem vértices $A(2, 0)$, $B(-3, 0)$ e $C(3, -3)$. Os pontos $P(-1, -1)$, $Q(1, 3)$ e $R(-\frac{1}{4}, 0)$ estão sobre BC , CA e AB , respectivamente.
- Determine as razões em que P , Q e R dividem os lados do triângulo.
 - Determine se P , Q e R são colineares.
34. Uma elipse toca os lados AB , BC , CD e DA de um paralelogramo nos pontos P , Q , R e S , respectivamente. Mostre que os comprimentos CQ , QB , BP e CR satisfazem

$$\frac{CQ}{QB} = \frac{CR}{BP}.$$

35. determine a equação da imagem da parábola P de equação $y = x^2$ pela transformação t definida por

$$t(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Mostre que a imagem do vértice de P não é o vértice de $t(P)$.

[Isto significa que *ser o vértice de uma parábola* não é uma propriedade afim.]

36. (a) Determine a, b, c, d tais que

$$[1, a, b] = \left[-\frac{1}{2}, 3, 4 \right], \quad [c, d, 2] = [3, 0, 1].$$

- (b) Quais das seguintes coordenada homogéneas representam o mesmo Ponto de \mathbb{RP}^2 que $[4, -8, 2]$?

- i. $[1, 4, -2]$.
- ii. $[\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}]$.
- iii. $[-\frac{1}{2}, -2, 1]$.
- iv. $[-2, 4, -1]$.
- v. $[-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$.

37. Determine a equação de cada uma das Rectas em \mathbb{RP}^2 :

- (a) A Recta que contém os Pontos $[1, 2, 3]$ e $[3, 0, -2]$.
- (b) A Recta que contém os Pontos $[1, -1, 1]$ e $[2, 1, -3]$.

38. Determine se os seguintes conjuntos de Pontos são colineares.

- (a) $[1, -1, 0]$, $[1, 0, -1]$, $[2, -1, -1]$.
- (b) $[1, 0, 1]$, $[0, 1, 2]$, $[1, 2, 3]$.

39. Determine o Ponto de intersecção de cada par de Rectas em \mathbb{RP}^2 .

- (a) As Rectas com equações $x - 2y + z = 0$ e $x - y - z = 0$.
- (b) As Rectas com equações $x + 2y + 5z = 0$ e $3x - y + z = 0$.

40. Determine o Ponto de \mathbb{RP}^2 em que a Recta que contém os Pontos $[8, -1, 2]$ e $[1, -2, -1]$ encontra a Recta que contém os Pontos $[0, 1, -1]$ e $[2, 3, 1]$.

41. Determine o Ponto de \mathbb{RP}^2 em que a Recta que contém os Pontos $[1, 2, 2]$ e $[2, 3, 3]$ encontra a Recta que contém os Pontos $[0, 1, 2]$ e $[0, 1, 3]$.

42. Determine quais das seguintes transformações t de \mathbb{RP}^2 são transformações projectivas. Para as que forem, identifique as respectivas matrizes.

- (a) $t : [x, y, z] \mapsto [2x, y + 3z, 1]$
- (b) $t : [x, y, z] \mapsto [x, x - y + 3z, x + y]$

- (c) $t : [x, y, z] \mapsto [2y, y - 4z, x]$
 (d) $t : [x, y, z] \mapsto [x + y - z, y + 3z, x + 2y + 2z]$

43. Determine as imagens dos Pontos $[1, 2, 3]$, $[0, 1, 0]$, $[1, -1, 1]$ pela transformação projectiva t associada à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

44. Sejam $t_1 : [x, y, z] \mapsto [2x + y, -x + z, y + z]$, $t_2 : [x, y, z] \mapsto [x + y, 3x - z, 4y - 2z]$ duas transformações projectivas de \mathbb{RP}^2 em \mathbb{RP}^2 .

- (a) Determine matrizes associadas a t_1 e t_2 .
 (b) Determine fórmulas para $t_2 \circ t_1$ e $t_2 \circ t_1^{-1}$.
 (c) Determine a imagem da Recta $x + 2y + 3z = 0$ por t_1 .

45. Determine matrizes associadas às transformações projectivas que transformam os Pontos $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[1, 1, 1]$ nos Pontos:

- (a) $[-2, 0, 1]$, $[0, 1, -1]$, $[-1, 2, -1]$, $[-1, 1, -1]$.
 (b) $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[-1, -1, 1]$, $[2, 1, 1]$.
 (c) $[0, 1, -3]$, $[1, 1, -1]$, $[4, 2, 3]$, $[7, 4, 3]$.

46. Use os resultados do exercício anterior para determinar transformações projectivas que transformem:

- (a) Os Pontos $[-2, 0, 1]$, $[0, 1, -1]$, $[-1, 2, -1]$, $[-1, 1, -1]$ nos Pontos $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[-1, -1, 1]$, $[2, 1, 1]$.
 (b) Os Pontos $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[-1, -1, 1]$, $[2, 1, 1]$ nos Pontos $[0, 1, -3]$, $[1, 1, -1]$, $[4, 2, 3]$, $[7, 4, 3]$.
 (c) Os Pontos $[0, 1, -3]$, $[1, 1, -1]$, $[4, 2, 3]$, $[7, 4, 3]$ nos Pontos $[-2, 0, 1]$, $[0, 1, -1]$, $[-1, 2, -1]$, $[-1, 1, -1]$.

47. Um Ponto U não pertence a nenhum dos lados do $\triangle ABC$ nem aos seus prolongamentos em \mathbb{RP}^2 . As Rectas BC e AU encontram-se em P , CA e BV encontram-se em Q , AB e CU encontram-se em R . Mostre que P , Q e R não são colineares.

48. Para cada um dos conjuntos de Pontos A, B, C, D , calcule o cross-ratio $(ABCD)$.
- (a) $A = [2, 1, 3], B = [1, 2, 3], C = [8, 1, 9], D = [4, -1, 3]$.
 - (b) $A = [2, 1, 1], B = [-1, 1, -1], C = [1, 2, 0], D = [-1, 4, -2]$.
 - (c) $A = [-1, 1, 1], B = [0, 0, 2], C = [5, -5, 3], D = [-3, 3, 7]$.
49. Determine as imagens dos pontos seguintes relativas à inversão na circunferência unitária, \mathcal{C} .
- (a) $(3, -4)$
 - (b) $(-1, 1)$
 - (c) $(9, 0)$
 - (d) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
50. Determine as imagens das circunferências seguintes relativas à inversão na circunferência unitária, \mathcal{C} .
- (a) Com centro em $(3, -4)$ e raio 5
 - (b) Com centro $(1, 2)$ e raio 3
51. Determine as imagens das rectas seguintes relativas à inversão na circunferência unitária, \mathcal{C} .
- (a) $y + 3x = 5$
 - (b) $y + 2x = 0$
52. Seja t a transformação definida por
- $$t(z) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i) z + 2i, \quad z \in \mathbb{C}.$$
- (a) Mostre que t representa uma isometria.
 - (b) Interprete t como a composição de uma rotação com uma translação.
 - (c) Interprete t como composição de reflexões.
53. Determine a imagem de cada um dos pontos seguintes pela inversão relativa à circunferência unitária.
- a) $-3 + 4i$.
 - b) $5 - 12i$.

54. Seja C a circunferência de raio 2 centrada em $1 + i$.
- (a) Escreva a inversão em C do plano completo como uma transformação de $\widehat{\mathbb{C}}$.
 - (b) Determine a imagem de i pela inversão em C .
55. Seja t a transformação linear generalizada dada por

$$t(z) = \begin{cases} -5iz + (2 + 6i) & z \in \mathbb{C} \\ \infty & z = \infty. \end{cases}$$

Exprima t como composição de inversões no plano completo.