Idade Média (Europa)

IM1

Do V ao X pouco se avança.

Permanece nos mosteiros a tradição do Quadrivium — Aritmética, Música, Geometria, Astronomia. (+ Gram, ret., lóg.)

A aritmética é versão latina de Nicómaco, pitagórica.

O texto fundamental é de Boécio (480-524) (Aritmética e Música)

e de Isidoro de Sevilha (560-636). Alcuíno de York (735-804) "Prat. acuendos juvenes"

O problema do calendário (Páscoa) esteve sempre presente.

Carlos Magno mandou que se ensine a matemática necessária à determinação da Páscoa (800).

No X renasce interesse pela Matemática. Gerbert d'Aurillac (945-1003) (Silvestre II em 999) estudou em Espanha, contactou com a matemática árabe, organizou os estudos na catedral de Reims. Ensinava Geometria, aritmética, utilizava mesa de cálculo com os números indo-árabes 1, ..., 9, sem zero nem casas decimais.

Os trabalhos gregos chegaram pelo trajeto grego-árabe-espanhol-latim. A tradução árabe-espanhol era feita pela comunidade judaica, a espanhol-latim pelos cristãos. (Toledo, XII)

Abelard (1075-1164) traduziu os Elementos.

As obras árabes foram também traduzidas.

IM 2

Geometria

Hissas (≈ 1100) 'Tratado das medições' com vocação prática mas fundamentado em definição e axiomas como os árabes tinham preservado de Euclides a tradição.

Fibonacci 'Geometria Prática' (1220).

- Começa c/ definição, axiomas e teoremas de Euclides. Resolve equação do segundo grau, justificando com teoremas dos 'Elementos'.
- Usa $\frac{22}{7}$ para π e recupera o método de Arquimedes dos polígonos inscritos/circunscritos.

Combinatória

- Os jindens, uma obra de autor desconhecido, calcularam de quantas formas se podem agrupar as 22 letras do seu alfabeto (Deus criou o mundo dizendo) duas a duas.
- Abraão ibn Ezra (1090-1167) determina de quantas formas se podem dispor os sete planetas. $\binom{7}{k}$, $k = 2, \dots, 7$.
- Levi ben Gerson ('A arte do Calculador', 1321)

  Baseia-se explicitamente no 'Elementos' e prova os teoremas no estilo de Euclides. Uma segunda parte dedica-se às aplicações.

IM3

Usar analogia "o método de avançar passo a passo, sem fim".

ex: Prop 9: $a(bc) = b(ac) = c(ab)$

Prop 10: $a(bcd) = b(acd) = \dots$

prova da Prop 9: contam diretos/quantas vezes cada fator aparece no produto.

prova da Prop 10: $a(bcd) \overset{9}{=} a(b(cd)) \overset{9}{=} b(a(cd))$

depois generalizar a qualquer número de factores.

Pode usar analogia para provar $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

o que faz usando $1+n$, $2+(n-1)$, $3+(n-2)$, ...

Prop 63: $P_{n+1} = (n+1) P_n$

prova: Dados a, b, c, d, e e outro elemento f

$f a b c d e$ é uma permutação e há P_n com f em 1º.

$a f b c d e$ " 2º

etc.

É o passo de analogia na prova de $\boxed{P_n = n!}$

Também por analogia prova $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

IM4

Fibonacci 'Liber Abbaci' (1202)

- Usa numerar sendo árabes com zero. Descreve algoritmos para as operações +, −, ×, ÷ de inteiros e fraccionários.
- Colecção de problemas de origem árabe e diversa com métodos diversos de resolução.

- Como compram 30 pássaros com 30 moedas se os pinguitos custam 3 moedas cada, os canários duas moedas e os pardais são a uma moeda o par?

3-5-22

- Um poço tem 50 metros de profundidade. Um leão começa a subir: de dia sobe $\frac{1}{7}$ de metro e cai $\frac{1}{9}$ metro de noite. Quanto tempo lhe demora a sair?

1571

- Se me deres um dinheiro, ficarei igual. Se eu te der um dinheiro ficas com 10 vezes o que eu fico.
- Um par de coelhos dá origem a outro par em cada mês. Cada novo par começa a ter descendência a partir do 2º mês de vida.
Começando com um par quantos pares há ao fim de um ano?

IMJ

Novos	Adultos	total
1	0	1
0	1	1
1	1	2
1	2	3
2	3	5
3	5	8
5	8	13
8	13	21

O 'Liber abbaci' é uma abordagem da matemática árabe (com duzentos anos de atraso) em foi a primeira.
'Liber Quadratorum' (1225) sobre aritmética avançada é mais teórico e inovador.

- Jordanus de Nemore (Paris, 1220) escreveu uma versão da Aritmética, como parte do Quadrivium, segundo moldes euclidianos, ao contrário de Boécio.
Aqui aparece pela primeira vez o 'triângulo de Pascal'

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \vdots & & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

com aplicação a desenvolvimentos algébricos e aritméticos.

FIBONACCI

$F_1 = F_2 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2$

1. $(F_n, F_{n+1}) = 1 \qquad \forall n$

2. Será verdade que F_p é primo $\Rightarrow p > 2$ é primo?

3. Use o algoritmo de Euclides para determinar o mdc a dois termos consecutivos F_n, F_{n+1}.
   [Aqui é o algoritmo das divisões]

$$a = q_1 b + r_1 \qquad 0 < r_1 < b$$
$$b = q_2 r_1 + r_2 \qquad 0 < r_2 < r_1$$
$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \qquad 0 < r_3 < r_2$$
$$\vdots$$
$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \qquad 0 < r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0$$
$$r_n = (a, b)$$

4. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

5. $F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n-1} \qquad (n \geq 2)$

6. $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = ?$

7. Todo o natural é soma de números de Fibonacci $\neq 5$.
Ilustre para 50, 75, 100.

8. Mostre que

a) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

b) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

FIBONACCI

1. $d \mid F_n$ e $d \mid F_{n+1} \Rightarrow d \mid (F_{n+1} - F_n)$ i.e. $d \mid F_{n-1}$

$d \mid F_n$ e $d \mid F_{n-1} \Rightarrow d \mid F_{n-2}$ etc

2. $F_{19} = 4181 = 37 \times 113$

Zo não se sabe se há sodale de primos nesta sucessão.

3. $\forall n$ há inteiros q̃ sucam n divisão: F_{n+2} e F_{n+1}.

4. $F_1 = F_3 - F_2$

$F_2 = F_4 - F_3$

$\vdots$

$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$

5. $$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-1}F_{n+1}$$

$$= (F_n - F_{n+1})F_{n-1} + F_n F_{n-2}$$

$$= -F_{n-1}^2 + F_n F_{n-2}$$

$$= (-1)(F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2})$$

similarly: $F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2} = (-1)(F_{n-2}^2 - F_{n-1}F_{n-3})$

$\therefore \quad F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^2(F_{n-2}^2 - F_{n-1}F_{n-3})$

after $n-2$ steps:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-2}(F_2^2 - F_3F_1)$$

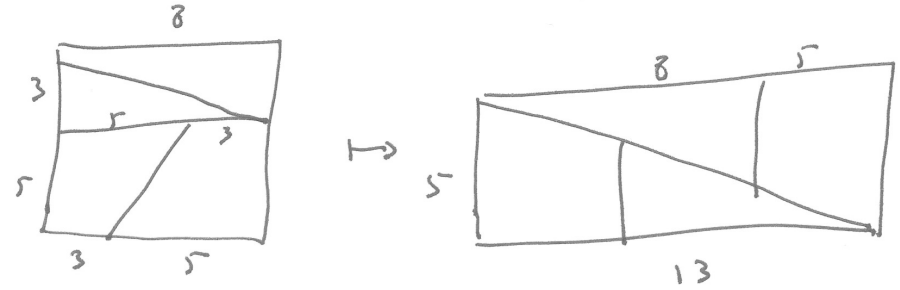
$$= (-1)^{n-2}(1^2 - 2)$$

$$= (-1)^{n-1}$$

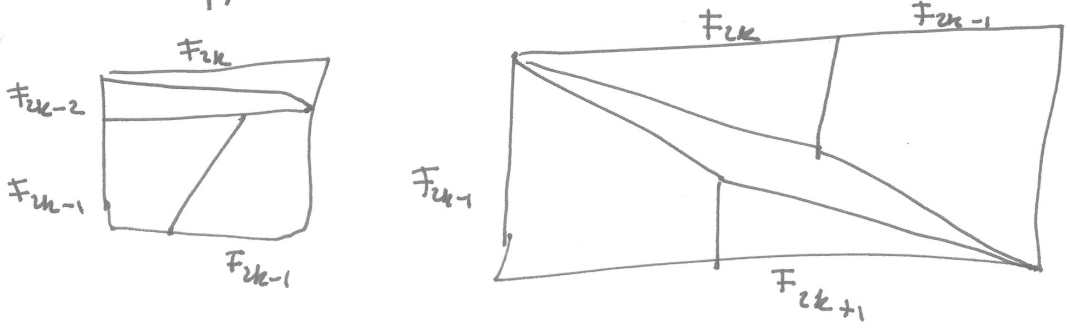
Si $n=2k$ tenemos

$$F_{2k}^2 = F_{2k-1}F_{2k+1} - 1$$

□ 8×8 dá ▭ 5×13.



what happens:



$F_{2k}^2 = F_{2k-1}F_{2k+1} - 1$ mostra q o to paralelogramo mede 1.

6. $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \dfrac{F_{n-1}}{F_n}$ $\quad\therefore\ \alpha = 1+\alpha^{-1}$

$\therefore\ \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

8. $F_1 = F_2$

$F_3 = F_4 - F_2$

$F_5 = F_6 - F_4$ $\quad$ somar

$\vdots$

IM6

A matemática do Movimento

Sem usar unidades de medida tentou-se relacionar Força, Resistência, Velocidade.

$F > R$ para que haja movimento.

$\frac{F}{R}$ proporcional a V falha ($R \to 2R \to 4R \to \cdots$
$\Rightarrow V \to \frac{V}{2} \to \frac{V}{4} \cdots > 0$
mas $F < 2^n R$)

Esta linha de pensamento levou ao entendo das razões e suas composições (produtos).

Bradwardine (1295-1349), Richard de Wallingford, ambos de Oxford deram passos significativos nessa direcção.
A conclusão é que as razões se podem multiplicar como fracções comuns.

Nicole Oresme (132-1382), univ. de Paris, tratou nesse potências racionais de razões $(a:b)^r$ e intuiu mesmo o caso de expoente irracional.

IM7

Velocidade

Até ao XIV as velocidades eram velocidades médias (tempo e distâncias).

Bradwardine (1330) definiu o "grau" de movimento como a parte do movimento sujeita a aumentos e diminuições.
Em notação actual, Bradwardine comparou velocidades:
Dados 2 corpos em movimento: l_1, v_1, t_1 ; l_2, v_2, t_2
tem-se

- se $t_1 = t_2$ então $v_1 : v_2 = l_1 : l_2$
- se $l_1 = l_2$ " $v_1 : v_2 = t_2 : t_1$

Heytesbury (1335) definiu velocidade instantânea.

> "É medida pelo caminho percorrido pelo ponto móvel se este, num período de tempo, se movesse a velocidade uniforme com essa velocidade"

também definiu aceleração uniforme.

- Que distância percorre um corpo com movimento uniformemente acelerado?

Heytesbury: "Se um corpo parte do repouso e se move com movimento uniformemente acelerado, ele percorre metade do espaço que percorreria no mesmo tempo assumindo da velocidade final."

(Oxford Calculators)

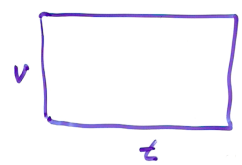
Em notação moderna: $v_f = at$

Heytesbury diz que $e = \frac{1}{2} v_f t$, isto é, $e = \frac{1}{2} a t^2$.

Outros em Merton College começam a representar estas grandezas por segmentos (seguindo Aristóteles)

Oresme utilizou "coordenadas" (t, v). Configuração. (Qualitativa)

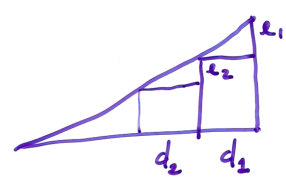
Movimento uniforme:



$e = vt$ (área)

são representações da v em função do t.

Movimento unif/acelerado:

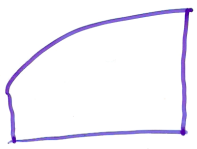


e = área

dá para provar regra da média

$$\frac{d_1}{d_2} : \frac{e_1}{e_2}$$

movimento geral:

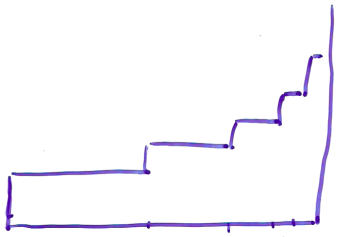


São representações qualitativas de uma dependência funcional (v como função de t). Abstracto.

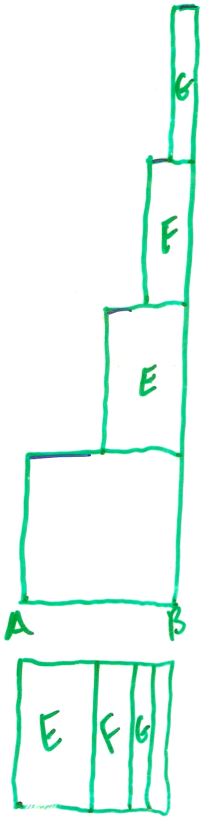
Precursor de Galileu.

(IM9)

Quem considera o seguinte problema.
Que distância fazem um corpo que se desloca à
velocidade 1 na primeira metade do intervalo de tempo AB (=1)
à velocidade 2 no quarto seguinte
" " 3 " oitavo "
" " 4 " 16 avos " etc. ?



$\frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 + \cdots + \frac{1}{2^m}\times m + \cdots$



$E = \frac{1}{2}$, $F = \frac{1}{4}$, $G = \frac{1}{8}$ etc
de quadrado em quadrado.

∴ a distância, que é
a soma da série, é 2.

IM 10

Universidades medievais

XII. Paris, oxford, Bologna.

U. Paris a partir de Notre Dame, 'artes, teologia, direito, medicina'

oxford fundada por ex-alunos de Paris.

Bologna fundada por alunos, dedicada ao direito.

artes = trivium + quadrivium = gramática, lógica, retórica, aritmética, música, geometria, astronomia.

lógica — Aristóteles

arit., música — Boécio

astronomia — Ptolomeu, autores arábicos.